

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

**МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ЗАДАНИЙ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

Электронное издание

Красноярск
СФУ
2018

УДК 51(07)
ББК 22.11я73
М340

Составители: **Лейнартене Анна Борисовна**
Ушаков Юрий Дмитриевич
Шевелева Ирина Викторовна

М340 Математика. Сборник заданий для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения : учеб.-метод. пособие / сост. : А. Б. Лейнартене, У. Д. Юшаков, И. В. Шевелева. – Электрон. дан. (540 Кб). – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2018. – Систем. требования: РС не ниже класса Pentium I ; 128 Mb RAM ; Windows 98/XP/7 ; Adobe Reader V8.0 и выше. – Загл. с экрана.

Содержит задания для самостоятельной работы по дисциплинам «Математика», «Специальные главы математики».

Предназначено для студентов укрупненных групп направлений подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» заочной формы обучения.

УДК 51(07)
ББК 22.11я73

© Сибирский федеральный
университет, 2018

Электронное учебное издание

Подготовлено к публикации издательством
Библиотечно-издательского комплекса

Подписано в свет 12.07.2018. Заказ № 5717
Тиражируется на машиночитаемых носителях

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391)206-26-67; <http://rio.sfu-kras.ru>
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru

ВВЕДЕНИЕ

Сборник заданий предназначен для самостоятельной работы студентов направлений подготовки 13.03.01, 13.03.02 заочной формы обучения по дисциплинам «Математика», «Специальные главы математики». Задания соответствуют Федеральным государственным образовательным стандартам и учебной программе дисциплины.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольная работа выполняется в тетради в клетку (12-18 листов) чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер направления подготовки (специальности), название дисциплины. В конце работы следует поставить подпись студента и дату выполнения работы.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Вариант определяется последней цифрой учебного номера (номера зачетной книжки). Цифре 0 соответствует вариант № 10. Определив свой номер варианта, студент выполняет по одной задаче из каждых десяти, объединенных общей формулировкой. Контрольные работы, содержащие не все задачи, либо задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления и дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Ниже приведены таблицы номеров задач, выполняемых в соответствующих контрольных работах.

Укрепленная группа направлений подготовки 13.03.01.

Математика (базовая)

Семестр 1

Контрольная работа 1					
Вариант	Номера контрольных заданий				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
10	10	20	30	40	50

Контрольная работа 2								
Вариант	Номера контрольных заданий							
1	51	61	71	81	91	101	111	121
2	52	62	72	82	92	102	112	122
3	53	63	73	83	93	103	113	123
4	54	64	74	84	94	104	114	124
5	55	65	75	85	95	105	115	125
6	56	66	76	86	96	106	116	126
7	57	67	77	87	97	107	117	127
8	58	68	78	88	98	108	118	128
9	59	69	79	89	99	109	119	129
10	60	70	80	90	100	110	120	130

Семестр 2

Контрольная работа 3						
Вариант	Номера контрольных заданий					
1	211	221	231	241	251	
2	212	222	232	242	252	
3	213	223	233	243	253	
4	214	224	234	244	254	
5	215	225	235	245	255	
6	216	226	236	246	256	
7	217	227	237	247	257	
8	218	228	238	248	258	
9	219	229	239	249	259	
10	220	230	240	250	260	

Контрольная работа 4						
Вариант	Номера контрольных заданий					
1	261	271	281	291	301	311
2	262	272	282	292	302	312
3	263	273	283	293	303	313
4	264	274	284	294	304	314
5	265	275	285	295	305	315
6	266	276	286	296	306	316
7	267	277	287	297	307	317
8	268	278	288	298	308	318
9	269	279	289	299	309	319
10	270	280	290	300	310	320

Семестр 3

Контрольная работа 5						
Вариант	Номера контрольных заданий					
1	321	331	341	351	361	
2	322	332	342	352	362	
3	323	333	343	353	363	
4	324	334	344	354	364	
5	325	335	345	355	365	
6	326	336	346	356	366	
7	327	337	347	357	367	
8	328	338	348	358	368	
9	329	339	349	359	369	
10	330	340	350	360	370	

Контрольная работа 6				
Вариант	Номера контрольных заданий			
1	371	381	391	401
2	372	382	392	402
3	373	383	393	403
4	374	384	394	404
5	375	385	395	405
6	376	386	396	406
7	377	387	397	407
8	378	388	398	408
9	379	389	399	409
10	380	390	400	410

Спецглавы математики

Семестр 1

Контрольная работа 1								
Вариант	Номера контрольных заданий							
1	131	141	151	161	171	181	191	201
2	132	142	152	162	172	182	192	202
3	133	143	153	163	173	183	193	203
4	134	144	154	164	174	184	194	204
5	135	145	155	165	175	185	195	205
6	136	146	156	166	176	186	196	206
7	137	147	157	167	177	187	197	207
8	138	148	158	168	178	188	198	208
9	139	149	159	169	179	189	199	209
10	140	150	160	170	180	190	200	210

Семестр 2

Контрольная работа 2						
Вариант	Номера контрольных заданий					
1	411	421	431	441	451	461
2	412	422	432	442	452	462
3	413	423	433	443	453	463
4	414	424	434	444	454	464
5	415	425	435	445	455	465
6	416	426	436	446	456	466
7	417	427	437	447	457	467
8	418	428	438	448	458	468
9	419	429	439	449	459	469
10	410	430	440	450	460	470

Семестр 3

Контрольная работа 3						
Вариант	Номера контрольных заданий					
1	471	481	491	501	511	521
2	472	482	492	502	512	522
3	473	483	493	503	513	523
4	474	484	494	504	514	524
5	475	485	495	505	515	525
6	476	486	496	506	516	526
7	477	487	497	507	517	527
8	478	488	498	508	518	528
9	479	489	499	509	519	529
10	480	490	500	510	520	530

Семестр 4

Контрольная работа 4							
Вариант	Номера контрольных заданий						
1	531	541	551	561	571	581	591
2	532	542	552	562	572	582	592
3	533	543	553	563	573	583	593
4	534	544	554	564	574	584	594
5	535	545	555	565	575	585	595
6	536	546	556	566	576	586	596
7	537	547	557	567	577	587	597
8	538	548	558	568	578	588	598
9	539	549	559	569	579	589	599
10	540	550	560	570	580	590	600

Укрупненная группа направлений подготовки 13.03.02.

Семестр 1

Контрольная работа 1							
Вариант	Номера контрольных заданий						
1	1	11	21	31	41	51	101
2	2	12	22	32	42	52	102
3	3	13	23	33	43	53	103
4	4	14	24	34	44	54	104
5	5	15	25	35	45	55	105
6	6	16	26	36	46	56	106
7	7	17	27	37	47	57	107
8	8	18	28	38	48	58	108
9	9	19	29	39	49	59	109
10	10	20	30	40	50	60	110

Контрольная работа 2								
Вариант	Номера контрольных заданий							
1	131	141	151	161	171	181	191	201
2	132	142	152	162	172	182	192	202
3	133	143	153	163	173	183	193	203
4	134	144	154	164	174	184	194	204
5	135	145	155	165	175	185	195	205
6	136	146	156	166	176	186	196	206
7	137	147	157	167	177	187	197	207
8	138	148	158	168	178	188	198	208
9	139	149	159	169	179	189	199	209
10	140	150	160	170	180	190	200	210

Семестр 2

Контрольная работа 3					
Вариант	Номера контрольных заданий				
1	211	221	231	241	251
2	212	222	232	242	252
3	213	223	233	243	253
4	214	224	234	244	254
5	215	225	235	245	255
6	216	226	236	246	256
7	217	227	237	247	257
8	218	228	238	248	258
9	219	229	239	249	259
10	220	230	240	250	260

Контрольная работа 4								
Вариант	Номера контрольных заданий							
1	261	271	281	291	321	331	341	361
2	262	272	282	292	322	332	342	362
3	263	273	283	293	323	333	343	363
4	264	274	284	294	324	334	344	364
5	265	275	285	295	325	335	345	365
6	266	276	286	296	326	336	346	366
7	267	277	287	297	327	337	347	367
8	268	278	288	298	328	338	348	368
9	269	279	289	299	329	339	349	369
10	270	280	290	300	330	340	350	370

Семестр 3

Контрольная работа 5								
Вариант	Номера контрольных заданий							
1	411	421	431	441	471	481	491	501
2	412	422	432	442	472	482	492	502
3	413	423	433	443	473	483	493	503
4	414	424	434	444	474	484	494	504
5	415	425	435	445	475	485	495	505
6	416	426	436	446	476	486	496	506
7	417	427	437	447	477	487	497	507
8	418	428	438	448	478	488	498	508
9	419	429	439	449	479	489	499	509
10	420	430	440	450	480	490	500	510

Контрольная работа 6							
Вариант	Номера контрольных заданий						
1	531	541	551	561	571	581	591
2	532	542	552	562	572	582	592
3	533	543	553	563	573	583	593
4	534	544	554	564	574	584	594
5	535	545	555	565	575	585	595
6	536	546	556	566	576	586	596
7	537	547	557	567	577	587	597
8	538	548	558	568	578	588	598
9	539	549	559	569	579	589	599
10	540	550	560	570	580	590	600

Линейная алгебра

1-10. Вычислить определитель.

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 10 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 11 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 15 \end{vmatrix}.$$

11-20. Дана система линейных уравнений. Доказать её совместность и решить двумя способами: 1) по формулам Крамера; 2) матричным методом.

$$11. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 2x + 5y + z = 0, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 3x - y + 8z = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x + y + 3z = 21, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + 3y = 4, \\ x - y + 5z = 10, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 5, \\ x \quad \quad 3z = 5, \\ -x + y + 6z = 6. \end{cases} \quad 18. \quad \begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ x + 3y + 5z = -2, \\ 2x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} x + 2y - 5z = 10, \\ x + y - 2z = 6, \\ 3x + y + 10z = 0. \end{cases} \quad 20. \quad \begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 6y - 3z = 6. \end{cases}$$

21-30. Записать систему линейных уравнений по ее расширенной матрице G . Исследовать совместность полученной системы и решить её методом Гаусса.

$$21. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & -4 & 14 & 1 \end{array} \right). \quad 22. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

$$23. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right). \quad 24. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{array} \right).$$

$$25. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 2 \\ 6 & -3 & 9 & 2 \end{array} \right). \quad 26. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 0 \\ 12 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

$$27. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 4 \end{array} \right). \quad 28. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

$$29. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{array} \right). \quad 30. \quad G = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

31-40. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – координаты произвольного вектора линейного пространства, заданные в некотором базисе. Известен закон изменения координат вектора под действием преобразования φ .

1. Доказать, что φ – линейное преобразование.
2. Составить матрицу линейного преобразования φ в том же базисе, в котором заданы координаты вектора x .
3. Найти образ вектора a и прообраз вектора b под действием преобразования φ .
4. Найти собственные векторы и собственные значения преобразования φ .

$$31. x^\varphi = \begin{pmatrix} 7x_1 - 6x_3 \\ 7x_1 - 2x_2 \\ 6x_1 - 6x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$32. x^\varphi = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ -4x_2 \\ 6x_1 - 4x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$33. x^\varphi = \begin{pmatrix} -6x_1 + 5x_3 \\ 2x_2 - 5x_3 \\ -3x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$34. x^\varphi = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_3 \\ -5x_2 \\ -4x_1 + 9x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$35. x^\varphi = \begin{pmatrix} -4x_1 + 8x_3 \\ 8x_1 + x_2 \\ -6x_1 + 10x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$36. x^\varphi = \begin{pmatrix} -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 \\ -x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$37. x^\varphi = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_3 \\ 3x_2 - 8x_3 \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$38. x^\varphi = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_3 \\ 4x_2 \\ 6x_1 + 10x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

$$39. x^\varphi = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ -10x_1 + 3x_2 \\ -4x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$40. x^\varphi = \begin{pmatrix} -9x_1 - 8x_3 \\ 4x_1 - 4x_2 \\ 4x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

41-50. Выполнить следующие задания:

1) решить уравнение $\alpha \cdot x + \beta = \gamma \cdot \delta$;

2) найти значение выражения $z = z_1 + \frac{z_2^3}{z_3}$;

3) найти и изобразить на комплексной плоскости корни уравнения $z^n = \alpha$.

41. 1) $(3 + 3i)x + 1 - 3i = (4 - 2i)(2 - 2i)$;
 2) $z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = 4e^{\pi i}$;
 3) $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$; $n = 3$.
42. 1) $(2 + 3i)x + 9 + 7i = (3 - 2i)(3 + 2i)$;
 2) $z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$; $z_2 = 2 + i\sqrt{12}$; $z_3 = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$;
 3) $\alpha = 4i$; $n = 4$.
43. 1) $(1 + 2i)x + 6 + 5i = (2 - 3i)(2 + 2i)$;
 2) $z_1 = 3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$; $z_3 = 2e^{-\pi i}$;
 3) $\alpha = -2 + i\sqrt{12}$; $n = 3$.
44. 1) $(3 + i)x - 7 - 7i = (4 - 4i)(1 - i)$;
 2) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$; $z_2 = -\sqrt{12} - 2i$; $z_3 = 16e^{\frac{3\pi}{2}i}$;
 3) $\alpha = -4i$; $n = 4$.
45. 1) $(1 - 2i)x + 3 - 3i = (2 - 7i)(1 + i)$;
 2) $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = 4e^{-\frac{\pi}{2}i}$;
 3) $\alpha = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $n = 3$.
46. 1) $(3 + 4i)x - 9 + i = (4 - i)(1 + i)$;
 2) $z_1 = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$; $z_2 = -2 + i\sqrt{12}$; $z_3 = 8e^{\pi i}$;
 3) $\alpha = -2 - i\sqrt{12}$; $n = 4$.
47. 1) $(1 + 3i)x + 1 + 5i = (2 - 2i)(3 + i)$;
 2) $z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}i}$; $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $z_3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{2}i}$;
 3) $\alpha = -\sqrt{3} - i$; $n = 3$.
48. 1) $(2 + 3i)x + 7 + 4i = (3 - 2i)(4 + 3i)$;
 2) $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{4}i}$; $z_2 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_3 = 4\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$;
 3) $\alpha = -2 + i\sqrt{12}$; $n = 4$.
49. 1) $(2 + 2i)x - 7 - 5i = (3 - 3i)(1 - 4i)$;
 2) $z_1 = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$;
 3) $\alpha = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $n = 3$.
50. 1) $(2 + 3i)x - 1 - 8i = (3 - 2i)(4 - 4i)$;
 2) $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$; $z_2 = -2 + i\sqrt{12}$; $z_3 = 4e^{-\pi i}$;
 3) $\alpha = -16i$; $n = 4$.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

51-60. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти:

- 1) угол между ребрами AB и AC ;
- 2) площадь и высоту BF треугольника BCD ;
- 3) объем пирамиды $ABCD$ и высоту, опущенную из точки A на грань BCD .

51. $A(1, -1, 0)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(8, 1, -1)$, $D(0, -1, 3)$.

52. $A(-4, 3, 0)$, $B(0, 1, 3)$, $C(-2, 4, -2)$, $D(1, -2, 1)$.

53. $A(3, 3, -1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(4, 1, 1)$, $D(0, -1, 0)$.

54. $A(0, 2, -4)$, $B(8, 2, 2)$, $C(6, 2, 4)$, $D(-1, -1, 0)$.

55. $A(3, -6, 9)$, $B(0, -3, 6)$, $C(9, -12, 10)$, $D(-2, 0, 1)$.

56. $A(2, -8, -1)$, $B(4, -6, 0)$, $C(-2, -5, 1)$, $D(-1, 1, 0)$.

57. $A(0, 0, 4)$, $B(-3, -6, 1)$, $C(-5, -10, -4)$, $D(-3, -2, 1)$.

58. $A(6, 2, -3)$, $B(6, 3, -2)$, $C(7, 3, -3)$, $D(0, 2, -4)$.

59. $A(-1, -2, 1)$, $B(-4, -2, 5)$, $C(-8, -2, 2)$, $D(0, 0, 4)$.

60. $A(2, 1, -1)$, $B(6, -1, -4)$, $C(4, 2, 1)$, $D(-1, 0, -1)$.

61-70. Даны векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} в некотором базисе. Найти:

- 1) проекцию вектора $2\bar{a}$ на вектор $\bar{b} + \bar{c}$;
- 2) векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}]$.

Проверить, образуют ли векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} базис? Если да, то какой базис: левый или правый?

61. $\bar{a} = \{2, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{-1, 0, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$.

62. $\bar{a} = \{3, 2, 1\}$, $\bar{b} = \{2, 3, 4\}$, $\bar{c} = \{3, 1, -1\}$.

63. $\bar{a} = \{1, 5, 2\}$, $\bar{b} = \{-1, 1, -1\}$, $\bar{c} = \{1, 1, 1\}$.

64. $\bar{a} = \{1, -1, 3\}$, $\bar{b} = \{3, 2, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 3, 4\}$.

65. $\bar{a} = \{1, -1, 3\}$, $\bar{b} = \{3, 2, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 3, 4\}$.

66. $\bar{a} = \{3, 1, -1\}$, $\bar{b} = \{-2, -1, 0\}$, $\bar{c} = \{5, 2, -1\}$.

67. $\bar{a} = \{4, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{1, -2, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$.

68. $\bar{a} = \{4, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{6, 7, 4\}$, $\bar{c} = \{2, 0, -1\}$.

69. $\bar{a} = \{3, 2, 1\}$, $\bar{b} = \{1, -3, -7\}$, $\bar{c} = \{1, 2, 3\}$.

70. $\bar{a} = \{3, 7, 2\}$, $\bar{b} = \{-2, 0, -1\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 1\}$.

71. Уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнения остальных трёх сторон квадрата, если $P(-1, 0)$ – точка пересечения его диагоналей. Сделать чертёж.

72. Даны уравнения одной из сторон ромба $x - 3y + 10 = 0$ и его диагоналей $x + 4y - 4 = 0$, диагонали ромба пересекаются в точке $P(0, 1)$. Сделать чертёж.

73. Уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 2 = 0$ и $x + y - 4 = 0$, а уравнение одной из его диагоналей $x - 2 = 0$. Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертёж.

74. Даны две вершины $A(-3, 3)$ и $B(5, -1)$ и точка $D(4, 3)$ пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон. Сделать чертёж.

75. Даны вершины $A(-3, -2)$, $B(4, -1)$, $C(1, 3)$ трапеции $ABCD$, ($AD \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции. Сделать чертёж.

76. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x - 4y + 15 = 0$ и $4x + y - 9 = 0$. Его медианы пересекаются в точке $P(0, -2)$. Составить уравнения третьей стороны треугольника. Сделать чертёж.

77. Даны вершины $A(2, -2)$, $B(3, -1)$, $P(1, 0)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC . Составить уравнение высоты треугольника, проведённой через третью вершину. Сделать чертёж.

78. Даны уравнения двух высот треугольника $x + y = 4$ и $y = 2x$ и одна из его вершин $A(0, 2)$. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертёж.

79. Даны уравнения двух медиан треугольника $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$ и одна из его вершин $A(1, 3)$. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать чертёж.

80. Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x - 2y - 8 = 0$ и $3x - 2y - 8 = 0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертёж.

81. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5, 0)$ относятся как $2 : 1$. Сделать чертёж.

82. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1, 0)$ вдвое меньше расстояния ее от прямой $x = -4$. Сделать чертёж.

83. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(2, 0)$ и от прямой $5x + 8 = 0$ относятся как $5 : 4$. Сделать чертёж.

84. Составить уравнения и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4, 0)$, чем от точки $B(1, 0)$. Сделать чертёж.

85. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(2, 0)$ и от прямой $2x + 5 = 0$ относятся как $4:5$. Сделать чертёж.

86. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(3, 0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26, 0)$. Сделать чертёж.

87. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0, 2)$ и от прямой $y - 4 = 0$. Сделать чертёж.

88. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(3, 0)$ относятся как $1:2$. Сделать чертёж.

89. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2, 6)$ и от прямой $y + 2 = 0$. Сделать чертёж.

90. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4, 0)$ втрое дальше, чем от начала координат. Сделать чертёж.

91-100. Привести заданное уравнение линии второго порядка к каноническому виду и построить её.

91. $2x^2 - y^2 + x + 2y = 0.$	92. $x^2 + y^2 = 2x + 4y.$
93. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 0.$	94. $x^2 + 4y^2 + 1 = 2y.$
95. $2x^2 + y^2 + 6y = 0.$	96. $2x - x^2 + 2y^2 = 0.$
97. $2x^2 - y^2 + 4y = 0.$	98. $x + 2y - y^2 = 0.$
99. $2x^2 + x + 2y^2 - 4y = 0.$	100. $x^2 + 2x + 4y^2 = 2.$

101-110. Даны уравнения плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$, канонические уравнения прямой L и координаты двух точек E и F . Найти:

1) уравнение плоскости, проходящей через точку E параллельно плоскости P ;

2) уравнение плоскости, проходящей через точку F перпендикулярно прямой L ;

3) угол между плоскостью P и прямой L ;

4) расстояние от точки E до плоскости P ;

5) уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки E и F .

101. $P: 5x - y + 2z + 1 = 0,$ $E(1, -1, 2), F(1, 3, 3),$
 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}.$

102. $P: 2x + 2y + z - 5 = 0,$ $E(-1, 0, 3), F(0, 2, 2),$
 $L: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{2}.$

103. $P: x + 5y - z + 7 = 0,$ $E(2, 1, 3), F(0, -1, 2),$
 $L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$
104. $P: 2x + y - z + 6 = 0,$ $E(2, 3, 4), F(-1, 0, 1),$
 $L: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}.$
105. $P: 3x + y - 5z + 4 = 0,$ $E(1, -3, 2), F(2, 4, 1),$
 $L: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{4}.$
106. $P: 2x + 5y - 4z = 0,$ $E(1, 1, 1), F(-1, 0, 3),$
 $L: \frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-5}.$
107. $P: 3x + y - 5z - 1 = 0,$ $E(1, 2, -4), F(3, 1, 1),$
 $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}.$
108. $P: 6x - 5y + 8z + 1 = 0,$ $E(1, 0, 1), F(-1, 3, 2),$
 $L: \frac{x+3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}.$
109. $P: 6x - y + z + 3 = 0,$ $E(-1, 0, -1), F(2, 1, 3),$
 $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}.$
110. $P: 6x + 8z - 4 = 0,$ $E(-1, 3, 0), F(2, 1, 2),$
 $L: \frac{x+3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}.$

111-120. Построить тело, ограниченное заданными поверхностями.

111. $z = x^2 + y^2 - 8, z = 0.$
112. $z = 10 - y^2, z = 0, x = 0, x = 8.$
113. $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 4, x + y = 2.$
114. $x^2 - y^2 - z^2 = 2, x^2 = 16.$
115. $x^2 - y^2 - z^2 - 2 = 0, x = 4, x = -4.$
116. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1, z = 0, z = 4.$
117. $y^2 = 2x^2 + 1, z(z - 4) = 0, x^2 = 1.$
118. $2x^2 + y^2 = 4y, z^2 - 16 = 0.$
119. $(x - 1)^2 + y^2 - 4z + 8 = 0, z - 8 = 0.$
120. $x^2 + y^2 + 2z = 8, z = 0.$

121-130. Линия задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

- 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая значения с шагом $\frac{\pi}{8}$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

$$121. \quad \rho = 2 \cos^3 \varphi.$$

$$122. \quad \rho = \sin 2\varphi.$$

$$123. \quad \rho = 2 \cos \varphi + 1.$$

$$124. \quad \rho = 2(1 - \cos \varphi).$$

$$125. \quad \rho = 2 \cos 2\varphi.$$

$$126. \quad \rho = \cos 3\varphi.$$

$$127. \quad \rho = \sin 3\varphi.$$

$$128. \quad \rho = \sin 4\varphi.$$

$$129. \quad \rho^2 = \sin 2\varphi.$$

$$130. \quad \rho = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

131-140. Найти область определения функции.

$$131. \quad y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}.$$

$$132. \quad y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg(4-x).$$

$$133. \quad y = \sqrt{\frac{x-1}{x-8}} + \log_2(12-x).$$

$$134. \quad y = \arcsin \frac{1-2x}{4} + \sqrt{1-x}.$$

$$135. \quad y = 2 \arccos \frac{x}{3} + \log_3(1-2x).$$

$$136. \quad y = \sqrt{3-x^2} + \lg \frac{x+1}{x-2}.$$

$$137. \quad y = \sqrt{4-|x|} + \lg \frac{x-3}{x-1}.$$

$$138. \quad y = \arcsin \frac{x+1}{3} + \sqrt{\lg(3-4x)}.$$

$$139. \quad y = \lg(4-|x|) + \sqrt{\sin 2x}.$$

$$140. \quad y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} + \sqrt{\lg(5-x^2)}.$$

141-150. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

$$141. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-x)^4 - (5-x)^4}{(4-x)^4 - (1+x)^4};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} \pi x}{\sin 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2x + 1} \right)^{3x^2 - 4}.$$

$$143. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(7-x)^4 - (9-x)^4}{(2-x)^3 - (1+x)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \operatorname{tg} 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x + 2}{10x - 7} \right)^{x-3}.$$

$$145. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-x)^2 - (3+x)^2}{(3+x)^2 - (1-x)^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sin 5x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{x+1}.$$

$$142. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-x)^2 + (5+x)^2}{(3-x)^2 - (7+x)^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2x + 1} \right)^{3x^2 - 4}.$$

$$144. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)^4 - (1+x)^4}{(1+x)^3 - (2-x)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 2} \right)^{\frac{x^2}{5}}.$$

$$146. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x+1)^2}{(x-1)^3 - (x+1)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 5} \right)^{3x+2}.$$

$$147. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+3x)^3 - 27x^3}{(1+2x)^2 + 4x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^x.$$

$$148. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-3x)^2}{(x-2)^3 - (x+2)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2(1-x)}{\sqrt{x} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{2 \operatorname{arctg} x - \sin x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{-x^2}.$$

$$149. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x-2)^3}{x^2 + 2x - 4};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{x \sin 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+2x)};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{3x^2 - 5x + 7} \right)^{x+1}.$$

$$150. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 + (x+2)^3}{(x+4)^3 + (x+5)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 5x}{\sin 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 21x - 7}{2x^2 + 18x + 9} \right)^{2x+1}.$$

151-160. Найти точки разрыва функций, исследовать их характер:

а) построить графики функций (схематично); б) исследовать на непрерывность функцию на соответствующих отрезках.

$$151. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{(x-1)(x-6)} \text{ на отрезках } [2, 5], [4, 10], [0, 7].$$

$$152. \text{ а) } y = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x}}};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{(x+1)(x-4)} \text{ на отрезках } [-4, -2], [0, 3], [4, 10].$$

$$153. \text{ а) } y = \frac{x}{x-4};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{x^2 - 26x + 25} \text{ на отрезках } [-1, 2], [4, 10], [17, 30].$$

154. а) $y = \frac{1}{e^{x-6}}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ на отрезках $[-1, 2]$, $[-7, 3]$, $[4, 10]$.

155. а) $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{2-x}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ на отрезках $[-12, -5]$, $[-7, -2]$, $[-4, 10]$.

156. а) $y = \frac{1}{4^{\frac{1}{1-x}}}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$ на отрезках $[-2, 1]$, $[0, 6]$, $[4, 10]$.

157. а) $y = \frac{1}{e^{x+3}}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ на отрезках $[-7, -1]$, $[0, 4]$, $[-1, 2]$.

158. а) $y = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ на отрезках $[-7, 0]$, $[0, 5]$, $[4, 9]$.

159. а) $y = \frac{|x-2|}{x-2}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8}$ на отрезках $[-4, 0]$, $[0, 8]$, $[5, 9]$.

160. а) $y = 15^{\frac{1}{x-4}}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 8x + 12}$ на отрезках $[-5, 0]$, $[0, 7]$, $[1, 5]$.

161-170. Вычисляя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, найти $f'(x_0)$.

171. $f(x) = x + \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

172. $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

173. $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$, $x_0 = 2$.

174. $f(x) = \sin x - x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

175. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$.

176. $f(x) = \sin 2x + \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

177. $f(x) = x - \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

178. $f(x) = \sqrt{x} - x^2$, $x_0 = 4$.

179. $f(x) = -\operatorname{tg} x - x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

170. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$.

171-180. Найти производные следующих функций:

171. а) $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2}$;

б) $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$;

в) $y = \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x-5}{\sqrt{31}}$;

г) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

д) $\sqrt{xy} = \cos \frac{y}{x}$.

173. а) $y = \frac{1}{3 \operatorname{tg}^2 2x}$;

б) $y = \lg \cos \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$;

в) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

д) $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.

175. а) $y = 5^{x\sqrt{1-x}}$;

б) $y = \lg\left(\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right)$;

в) $y = \arccos \ln \frac{1}{x}$;

г) $y = 2^{x^x}$;

д) $y \ln y = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

177. а) $y = e^{\sqrt{x} \ln x} - \sqrt{\operatorname{tg} 4}$;

б) $y = \lg \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

в) $y = \sqrt{\arcsin \frac{x}{2}}$;

г) $y = x^{2^x}$;

д) $\frac{x}{y} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

172. а) $y = \sqrt{x e^{\frac{1}{x}} - x}$;

б) $y = \ln(\log_2 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}})$;

в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$;

г) $y = \log_x 2^x$;

д) $x^y = y^x$.

174. а) $y = 10^{x^2 \operatorname{tg} x}$;

б) $y = \log_2 \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$;

в) $y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

г) $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$;

д) $\sin xy + \cos xy = \operatorname{tg}(x+y)$.

176. а) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{8}{1 + e^{\frac{4}{x}}}$;

б) $y = \log_5 \operatorname{tg} x^2$;

в) $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{x}}$;

г) $y = x^{x^2}$;

д) $xy = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

178. а) $y = \operatorname{tg} \lg \frac{1}{3} + 2^{\sqrt{\sin^3 x}}$;

б) $y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$;

в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\sin \sqrt{x}}$;

г) $y = \sqrt[x]{x}$;

д) $\ln_x y = \frac{x}{y}$.

179. а) $y = 10^{\sqrt{x} \operatorname{ctg} x}$;
- б) $y = \log_2 \sin \frac{x + \sqrt{3}}{4}$;
- в) $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$;
- г) $y = x^{\sqrt{x}}$;
- д) $\ln \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$.
180. а) $y = 3 \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;
- б) $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$;
- в) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} - 3}{\sqrt{2}}$;
- г) $y = x^{\operatorname{arcsin} x}$;
- д) $\ln_y x = x^2 + y^2$.

181-190. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближённое значение функции $y = f(x)$ в заданной точке x_0 .

181. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 65$. 182. $y = \lg x$, $x_0 = 10, 23$.
183. $y = \cos x$, $x_0 = 32^\circ$. 184. $y = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 33$.
185. $y = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = 45^\circ, 15'$. 186. $y = \sqrt{4x - 3}$, $x_0 = 1, 78$.
187. $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$, $x_0 = 1, 58$. 188. $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0, 97$.
189. $y = \ln x$, $x_0 = 1, 02$. 190. $y = \sin x$, $x_0 = 29^\circ$.

191-200. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталю.

191. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\ln x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$.
192. а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
193. а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2 - x^2}{\sin x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
194. а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$.
195. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.
196. а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 6x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arcsin} x)^{\operatorname{tg} x}$.
197. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.
198. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

$$199. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x}}.$$

$$200. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x.$$

201-210. Решить задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функции.

201. Найти наибольший объем цилиндра, у которого полная поверхность равна 18 дм^2 .

202. Найти высоту прямого цилиндра с наибольшим объемом, который может быть вписан в шар радиуса R .

203. Из углов прямоугольного листа картона размером $8 \times 5 \text{ дм}^2$ нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы согнув лист получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезанного квадрата?

204. Требуется устроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Каковы наивыгоднейшие (в смысле площади) размеры площадки, если имеется материала на 100 м забора?

205. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса $R = \sqrt{5}$.

206. Требуется сделать открытый цилиндрический резервуар объемом 27 м^3 . Стоимость материала, из которого делается дно резервуара, в 9 раз больше стоимости материала, идущего на боковые стенки. При каких размерах резервуара его постройка будет наиболее дешевой?

207. Найти размеры цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в конус высотой 9 см и радиуса 6 см .

208. Требуется поставить палатку данного объема V_0 , имеющую форму прямого кругового конуса. Найти отношение высоты конуса к радиусу основания, при котором на палатку пойдет наименьшее количество материала.

209. Требуется изготовить из жести ведро данного объема V_0 цилиндрической формы без крышки. Найти высоту и радиус основания, при которых на ведро уйдет наименьшее количество материала.

210. Пароход А находится на расстоянии 100 км от парохода В по направлению к западу и плывет на север со скоростью $v_A = 12 \text{ км/ч}$, а пароход В плывет на запад со скоростью $v_B = 9 \text{ км/ч}$. Через какое время расстояние между пароходами будет наименьшим? Какое расстояние будет между пароходами?

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

211-220. Найти область определения функций $z = f(x, y)$ и $u = f(x, y, z)$. В случае а) изобразить область определения на чертеже.

211. а) $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;

б) $u = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$.

212. а) $z = \ln(x + 2y - 1)$;

б) $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - z}{e^{xyz}}}$.

213. а) $z = \frac{1}{\ln(1 - xy)}$;

б) $u = \frac{z + 2xy}{x^2 + y^2 + z^2 - 3}$.

214. а) $z = \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2 - y}}$;

б) $u = \ln(x + 4y - 2z - 8)$.

215. а) $z = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$;

б) $u = \frac{\sqrt{z}}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$.

216. а) $z = \arccos \frac{x - 2y + 1}{x + 3}$;

б) $u = x + \sqrt{yx}$.

217. а) $z = \sqrt{\frac{x^2 + 3y^2}{y - x^2 - 2x - 2}}$;

б) $u = \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$.

218. а) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{3x + 2y - 6}$,

б) $u = \frac{x^2 y}{2x + y - z + 4}$.

219. а) $z = \sqrt{\ln(x^2 - 4y)}$;

б) $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

220. а) $z = \arcsin \frac{x + y}{3y}$;

б) $u = \frac{1}{x^2 - y^2 + z^2}$.

221-230. Даны функция $z = f(x, y)$ и точки $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$.
Найти:

1) полный дифференциал;

2) уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0)$;

3) приближенное значение в точке $M_1(x_1, y_1)$, используя дифференциал.

221. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(0; 1)$, $M_1(1, 02; 0, 05)$.

222. $z = \ln(x^2 + xy)$, $M_0(1; 0)$, $M_1(1, 2; 0, 04)$.

223. $z = e^{x^2 - xy}$, $M_0(1; 1)$, $M_1(1, 2; 0, 85)$.

$$224. \quad z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad M_0(1; 0), \quad M_1(1, 98; 1, 03).$$

$$225. \quad z = \frac{1}{x} + 2xy^2, \quad M_0(1; 1), \quad M_1(0, 84; 2, 12).$$

$$226. \quad z = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad M_0(1; 1), \quad M_1(1, 92; 8, 08).$$

$$227. \quad z = \sqrt{\frac{x}{x+y}}, \quad M_0(1; 1), \quad M_1(1, 09; 2, 88).$$

$$228. \quad z = \ln(4 - x^2y), \quad M_0(1; 1), \quad M_1(1, 22; 3, 09).$$

$$229. \quad z = \sqrt[3]{x^2 + y}, \quad M_0(1; 0), \quad M_1(2, 96; -1, 12).$$

$$230. \quad z = e^{yx^2 - 1}, \quad M_0(1; 1), \quad M_1(1, 21; 0, 88).$$

231-240. Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что выполняется соотношение $F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0$.

$$231. \quad z = \operatorname{arctg} xy, \quad F = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$232. \quad z = \cos(x - ay) + e^{x+ay}, \quad a - \text{const}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$233. \quad z = e^{-\cos(ax+y)}, \quad a - \text{const}, \quad F = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$234. \quad z = \frac{y}{x}, \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$235. \quad z = \frac{\sin(y-x)}{x}, \quad F = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$236. \quad z = e^{y/x}, \quad F = 2x \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$237. \quad z = y \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$238. \quad z = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-(x-a)^2/y}, \quad a - \text{const}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$239. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$240. \quad z = \sin^2(y - ax), \quad a - \text{const}, \quad F = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

241-250. Даны функции $z = z(u, v)$ и $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и сложной функции $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

$$241. \quad z = e^{2uv}, \quad u = \sin(x - y), \quad v = \cos(x - y).$$

$$242. \quad z = uv, \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

$$243. \quad z = u^3 + v^3, \quad u = x + y, \quad v = x^2 + y^2.$$

$$244. \quad z = \ln \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u = e^{x+y}, \quad v = e^{x-y}.$$

$$245. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad u = x \cos y, \quad v = x \sin y.$$

$$246. \quad z = u^v, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = xy.$$

$$247. \quad z = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad u = xe^y, \quad v = ye^x.$$

$$248. \quad z = uv, \quad u = x + y - \cos x, \quad v = x - y + \cos x.$$

$$249. \quad z = \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{v}}, \quad u = xy, \quad v = 1 + x^2 + y^2.$$

$$250. \quad z = u^2 \ln v, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = x^2 + y^2.$$

251-260. Дана функция $z = f(x, y)$ и область D . Найти:

1) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

2) наибольшее и наименьшее значения в области D .

$$251. \quad z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad D: x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3.$$

$$252. \quad z = x^3 + y^3 - 3x, \quad D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2, x + y \geq -3.$$

$$253. \quad z = x^2 - 3y^2 + 2xy + y, \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1.$$

$$254. \quad z = y^2 - 3x^2 + 2xy + x, \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 2.$$

$$255. \quad z = x^2 + y^2 - xy - 4x, \quad D: x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \geq 12.$$

$$256. \quad z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 3.$$

$$257. \quad z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, \quad D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1.$$

$$258. \quad z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x, \quad D: x \leq 0, y \leq 0, x + y + 2 \geq 0.$$

$$259. \quad z = 3 - 2x^2 - y^2 - xy, \quad D: x \leq 1, y \geq 0, y \geq x.$$

$$260. \quad z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

Интегральное исчисление функций одной переменной

261-270. Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результат проверить дифференцированием.

261. а) $\int \frac{3x^3 + \ln x}{x} dx;$ б) $\int (4 + 5x) \cos x dx;$

в) $\int \frac{x^4 + 4x^3 + 2x}{(3+x)(2+x^2)} dx;$ г) $\int \frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx.$

262. а) $\int \frac{\sqrt[3]{2 + \ln x}}{x} dx;$ б) $\int (x + 2)^2 e^{x+3} dx;$

в) $\int \frac{9x^4 - 18x^2}{x^3 - 3x + 2} dx;$ г) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 4x}} dx.$

263. а) $\int \frac{\arcsin^3 3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx;$ б) $\int x^2 \ln x dx;$

в) $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^2} dx;$ г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x}}.$

264. а) $\int \frac{\sin \frac{1}{x} + 2}{x^2} dx;$ б) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx;$

в) $\int \frac{x^5 - x^2}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} dx;$ г) $\int \frac{4x + 7}{x^2 + 4x + 5} dx.$

265. а) $\int \frac{3x + \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx;$ б) $\int \frac{\ln x + 5}{\sqrt{x}} dx;$

в) $\int \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^3 + x} dx;$ г) $\int \frac{3 + x}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx.$

266. а) $\int \frac{2x + 1}{e^{x^2 + x} - 1} dx;$ б) $\int \frac{4x + 3}{2^x} dx;$

в) $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 27x}{x^3 + 27} dx;$ г) $\int \frac{4x + 5}{\sqrt{8 - 2x - x^2}} dx.$

267. а) $\int \frac{3 \sin x + 1}{\cos^2 x} dx;$ б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} dx;$

в) $\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^3 - 8} dx;$ г) $\int \frac{4x + 7}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx.$

268. а) $\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x - 3}} dx;$ б) $\int \frac{5x + 3}{\sin^2 x} dx;$
 в) $\int \frac{x^3 - 5x - 8}{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)} dx;$ г) $\int \frac{2 - 6x}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} dx.$
269. а) $\int \frac{\cos x + 1}{\sin x + x} dx;$ б) $\int (2x^2 - 3x) \cos x dx;$
 в) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x + 1)(x^2 + 4x + 5)} dx;$ г) $\int \frac{3 - 2x}{\sqrt{7 - 6x - x^2}} dx.$
270. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 - 1}} dx;$ б) $\int x \ln^2 x dx;$
 в) $\int \frac{3x^3 - 6x}{x^3 - 1} dx;$ г) $\int \frac{5 - 2x}{8 + 4x + x^2} dx.$

271-280. Вычислить определенные интегралы

271. а) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{2 + \cos x};$ б) $\int_0^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{4} dx;$
 в) $\int_0^2 \frac{dx}{2x + 3 + \sqrt{(2x + 3)^3}};$ г) $\int_{\frac{\sqrt{5}}{\pi/2}}^{\sqrt{12}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}.$
272. а) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x};$ б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin 4x \cos 6x dx;$
 в) $\int_1^3 \frac{x + 2}{\sqrt[3]{(x + 1)^4 + \sqrt[3]{x + 1}}} dx;$ г) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x + \sqrt{x^2 + 1}}.$
273. а) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx;$ б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx;$
 в) $\int_2^6 \frac{\sqrt{x - 2} + x}{1 + \sqrt{x - 2}} dx;$ г) $\int_{\frac{\sqrt{5}}{\pi/2}}^{\sqrt{10}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx.$
274. а) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx;$ б) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \frac{x}{2} dx;$

275. B) $\int_1^{16} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}} dx;$
 a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + 2};$
 B) $\int_0^1 \frac{x+1}{2x+3 + \sqrt{(2x+3)^3}} dx;$
 276. a) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{4 + 2 \sin x + 3 \cos x};$
 B) $\int_1^{64} \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x^4}} dx;$
 277. a) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos x \sin x + 5 \cos^2 x};$
 B) $\int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + 3} dx;$
 278. a) $\int_{\arctg 2}^{\arctg 6} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx;$
 B) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3} - x - 3} dx;$
 279. a) $\int_{\pi/2}^{11} \frac{dx}{1 - 2 \sin x + 3 \cos x};$
 B) $\int_4^{11} \frac{x-3}{2 + \sqrt[3]{x-3}} dx;$
 280. a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x};$
 B) $\int_1^9 \frac{5 + \sqrt{3x-2}}{\sqrt[3]{(3x-2)^2}} dx;$
 r) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2+1)^3}}.$
 б) $\int_{\pi/4}^{\pi/4} \sin^4 x dx;$
 r) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$
 б) $\int_{-\pi/2}^0 \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$
 r) $\int_1^{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx.$
 б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 6x \cos 2x dx;$
 r) $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$
 б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \sin 5x \sin 7x dx;$
 r) $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(9-x^2)^3}} dx.$
 б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx;$
 r) $\int_1^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^2} dx.$
 б) $\int_{-\pi/2}^0 \cos^4 x dx;$
 r) $\int_0^{1/2} \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

281-290. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$281. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_{1/2}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$282. \text{ а) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}};$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{2x-3}{\sqrt{(5+4x-x^2)^3}} dx.$$

$$283. \text{ а) } \int_3^{\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 3x}{\sqrt[5]{\sin 3x}} dx.$$

$$284. \text{ а) } \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+3x+2};$$

$$\text{б) } \int_0^1 x^2 \ln x dx.$$

$$285. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{2x+3}{e^x} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+5x+6}.$$

$$286. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{x^3}{(x^4+1)^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x} dx.$$

$$287. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)^5} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\sqrt{5-\ln x}}{x} dx.$$

$$288. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x}{(x^2-5)^4} dx.$$

$$289. \text{ а) } \int_0^{\infty} x \sin x dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x}{(1-x^2)^2} dx.$$

$$290. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx.$$

291-300. Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 10 частей.

$$291. \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx.$$

$$292. \int_1^2 x \cdot 2^{x-x^2} dx.$$

$$293. \int_0^1 \frac{\sqrt{5x-x^2}}{e^x} dx.$$

$$294. \int_3^4 \frac{e^{-x^2}}{2x} dx.$$

$$295. \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x} dx.$$

$$296. \int_2^4 \frac{x}{\ln x} dx.$$

$$297. \int_1^3 x^2 2^{1/x} dx.$$

$$298. \int_3^4 \frac{x^2-3x}{x^3+x^2} dx.$$

$$299. \int_2^4 \frac{\sin 3x}{e^{-x}} dx.$$

$$300. \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

301-310. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

$$301. y = x^2 - 2x + 2, y = x + 2.$$

$$302. y^2 = x + 4, y = x - 2.$$

$$303. y = 2^x - 1, y = 2^{2x} - 3, x = 0.$$

$$304. y = \frac{8}{x^2+4}, 4y = x^2, x = 0.$$

$$305. \rho = a \sin^2 2\varphi, a > 0 \text{ (четырёхлепестковая роза).}$$

$$306. \rho = a \sin 3\varphi, a > 0 \text{ (трехлепестковая роза).}$$

$$307. \rho = a(1 - \cos \varphi), a > 0 \text{ (кардиооида).}$$

$$308. y = a \sin^3 t, x = a \cos^3 t, a > 0 \text{ (астроида).}$$

$$309. \text{Одной аркой циклоиды } y = a(1 - \cos t), x = a(t - \sin t), a > 0 \text{ и } y = 0.$$

$$310. \text{Петлей кривой } y = \frac{1}{3}t(3 - t^2), x = t^2.$$

311-320. Вычислить длину.

$$311. \text{Петли кривой } y = t^2, x = \frac{1}{3}t(3 - t^2).$$

$$312. \text{Одной арки циклоиды } y = a(1 - \cos t), x = a(t - \sin t), a > 0.$$

$$313. \text{Астроиды } y = a \sin^3 t, x = a \cos^3 t, a > 0.$$

$$314. \text{Кардиоиды } \rho = a(1 - \cos \varphi), a > 0.$$

315. Дуги параболы $\frac{y^2}{2} = x + 4$ отсеченной прямой $y = x + 4$.

316. Полукубической параболы $y^2 = x^3$ расположенной между началом координат и точкой $M(9, 27)$.

317. Дуги кривой $y = \ln \sin x$, при $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

318. Дуги кривой $y = \arccos e^{-x}$, при $1 \leq x \leq 2$.

319. Первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

320. Дуги кривой $y = e^x$ заключенной между точками $(0, 1)$ и $(2, e^2)$.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

321-330. Изменить порядок интегрирования

$$321. \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy. \quad 322. \int_0^4 dx \int_{3x/4}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$323. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy. \quad 324. \int_{-3}^0 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-5x/4} f(x, y) dy.$$

$$325. \int_0^3 dx \int_{-5x/4}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy. \quad 326. \int_0^1 dx \int_{2x+1}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

$$327. \int_0^1 dx \int_{x^2-4}^{-2x-1} f(x, y) dy. \quad 328. \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$329. \int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x, y) dy. \quad 330. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy.$$

331-340. Вычислить

$$331. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy; D = \{y = x, x = 0, y = 1, y = 2\}.$$

$$332. \iint_D \sin y dx dy; D = \{x=0, y=0, 4x+4y-\pi=0\}.$$

$$333. \iint_D (x+2y) dx dy; D = \{y=x, y=2x, x=2, x=3\}.$$

$$334. \iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy; D = \{x=0, y=\sqrt{x}, y=2\}.$$

$$335. \iint_D x dx dy; D = \{y-x=2, y=x^2\}.$$

$$336. \iint_D (x-y) dx dy; D = \{y=2-x^2, y=0\}.$$

$$337. \iint_D \sin(x+y) dx dy; D = \{y=x, y=2x-1, x=0\}.$$

$$338. \iint_D x(y+1) dx dy; D = \{y=x+1, y=4x, x=0\}.$$

$$339. \iint_D x dx dy; D = \{x+y=2, x=0, y=x^3\}.$$

$$340. \iint_D (x-y^3) dx dy; D = \{y=1-x^2, y=0\}.$$

341-350. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной данными линиями, заданными уравнениями в декартовых координатах. Сделать чертеж данной фигуры.

$$341. y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$$

$$342. x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x/\sqrt{3}.$$

$$343. x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$$

$$344. y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \sqrt{3}x, x = 0.$$

$$345. y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = x.$$

$$346. x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = x.$$

347. $y^2 - 10y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$

348. $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x/\sqrt{3}, y = \sqrt{3}x.$

349. $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

350. $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = 0.$

351-360. Вычислить

351. $\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz; V = \{2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4\}.$

352. $\iiint_V x^2 y z dx dy dz; V = \{-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3\}.$

353. $\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz; V = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1\}.$

354. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz; V = \{0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}.$

355. $\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz; V = \{-1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 5\}.$

356. $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz; V = \{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2\}.$

357. $\iiint_V (2x - y^2 - z) dx dy dz; V = \{1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0\}.$

358. $\iiint_V 2xy^2 z dx dy dz; V = \{0 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 0, 1 \leq z \leq 2\}.$

359. $\iiint_V 5xyz^2 dx dy dz; V = \{-1 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2\}.$

360. $\iiint_V (x^2 + 2y^2 - z) dx dy dz; V = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, -1 \leq z \leq 2\}.$

361-370. Вычислить при помощи тройного интеграла в цилиндрических координатах объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

361. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $9z/2 = x^2 + y^2$.
362. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)/255}$.
363. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 60$.
364. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 10 - x^2 - y^2$.
365. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)/99}$.
366. $z = \frac{21}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 23/2 - x^2 - y^2$.
367. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $3z/2 = x^2 + y^2$.
368. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 39$.
369. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)/35}$.
370. $z = 12\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 28 - x^2 - y^2$.

Теория поля

371-380. Вычислить криволинейный интеграл I-го рода.

371. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; L – отрезок прямой $x - 2y = 4$, заключенный между точками $A(0, -2)$, $B(4, 0)$.

372. $\int_L \frac{ds}{x - y}$; L – отрезок прямой $2y = x - 2$, заключенный между точками $A(0, -2)$, $B(4, 0)$.

373. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$; L – отрезок прямой соединяющий точки $A(0, 0)$, $B(1, 2)$.

374. $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$; L – первый виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

375. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$; L – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

376. $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$; L – первый виток конической винтовой линии $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$.

377. $\int_L (x + z) ds$; L – дуга кривой $x = t$, $y = 3t^2\sqrt{2}$, $z = t^2$, $(0 \leq t \leq 1)$.

378. $\int_L y^2 ds$; L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

379. $\int_L xy ds$; L – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадрате.

380. $\int_L xy ds$; L – контур квадрата $|x| + |y| = a$, $(a > 0)$.

381-390. Даны векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и плоскость P : $Ax + By + Cz + D = 0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V . Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости P ; \vec{n} – нормаль к σ , направленная вне пирамиды V . Требуется вычислить

1) поток векторного поля \vec{F} через поверхность σ в направлении \vec{n} ;
 2) поток векторного поля \vec{F} через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к её поверхности, непосредственно и применив теорему Гаусса-Остроградского.

3) Сделать чертеж.

381. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $P: x/2 + y + z = 1$.

382. $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $P: x + y/2 + z/2 = 1$.

383. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$; $P: x/3 + y + z/2 = 1$.

384. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 5y\vec{j} + 5z\vec{k}$; $P: x/2 + y/3 + z = 1$.

385. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $P: 2x + y/2 + z = 1$.

386. $\vec{F} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$; $P: 2x + y/2 + z = 1$.

387. $\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 8z\vec{k}$; $P: x + 2y + z/2 = 1$.

388. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $P: 2x + 3y + z = 1$.

389. $\vec{F} = y\vec{j} + 3z\vec{k}$; $P: x/2 + y + z = 1$.

390. $\vec{F} = 3x\vec{i} + 2z\vec{k}$; $P: x + y/2 + z/3 = 1$.

341-350. Даны векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и контур L . Вычислить циркуляцию вектора \vec{F} по контуру L непосредственно и пользуясь формулой Стокса.

391. $\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{k}$; $L: \{x^2 + y^2 = 4, 2z + x = 5\}$.

392. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$; $L: \{x^2 + y^2 = 1, z = 4\}$.

393. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$; $L: \{x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0\}$.

394. $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{j} + y^2\vec{k}$; $L: \{y^2 = 4 - x - z, z = 0, x = 0, y = 0\}$.

395. $\vec{F} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$; $L: \{x^2 = 4 - y - z, z = 0, x = 0, y = 0\}$.

396. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$; $L: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

397. $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$; $L: \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

398. $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; $L: \{x^2 + z^2 = 1 - y, x = 0, y = 0, z = 0\}$.

399. $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$; $L: \{z = x^2 + y^2 - 10, z = -1\}$.

400. $\vec{F} = x\vec{i} + (x + 2)\vec{j} + z\vec{k}$; $L: \{z^2 = 4 - x - y, z = 0, x = 0, y = 0\}$.

401-410. Дано векторное поле \vec{F} . Проверить, будет ли потенциальным и соленоидальным поле \vec{F} . В случае потенциальности поля найти его потенциал $u(x, y, z)$.

401. $\vec{F} = (-2x - yz)\vec{i} + (-2y - xz)\vec{j} + (-2z - xy)\vec{k}$.

402. $\vec{F} = (2x - yz)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$.

403. $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$.

404. $\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$.

405. $\vec{F} = (2x - 4yz)\vec{i} + (2y - 4xz)\vec{j} + (2z - 4xy)\vec{k}$.

406. $\vec{F} = (2x - 3yz)\vec{i} + (2y - 3xz)\vec{j} + (2z - 3xy)\vec{k}$.

407. $\vec{F} = (-3x + yz)\vec{i} + (-3y + xz)\vec{j} + (-3z + xy)\vec{k}$.

408. $\vec{F} = (-x + yz)\vec{i} + (-y + xz)\vec{j} + (-z + xy)\vec{k}$.

409. $\vec{F} = (4x + yz)\vec{i} + (4y + xz)\vec{j} + (4z + xy)\vec{k}$.

410. $\vec{F} = (2x + 5yz)\vec{i} + (2y + 5xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$.

Дифференциальные уравнения

411-420. Найти общее решение дифференциального уравнения.

411. $xdy - \left(y - x \sin \frac{y}{x}\right) dx = 0.$ **412.** $xdy - \left(y + 3x \operatorname{tg} \frac{y}{x}\right) dx = 0.$

413. $xe^{y/x} dy - \left(ye^{y/x} - x\right) dx = 0.$ **414.** $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0.$

415. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}.$ **416.** $4xy' = -4\sqrt{xy} + x.$

417. $xdy - y \left(\ln \frac{y}{x} - 2\right) dx = 0.$ **418.** $(x^2 - y^2)dx - 4xydy = 0.$

419. $xy' = y - x \cos \frac{y}{x}.$ **420.** $(3x^2 - y^2)dx = (x^2 + 3y^2y)dy.$

421-430. решить задачу Коши.

421. $xy' - 2y = x^3 e^x, y(1) = 2.$

422. $y' \sin x - y \cos x = \frac{1}{\cos^2 x}, y(\pi/2) = 0.$

423. $y' + 2xy = 2y^3 x^2 e^x, y(1) = e.$

424. $y' = y \sin x + x e^{-\cos x}, y(0) = 1.$

425. $xy' + \frac{\sqrt{x}}{2}y = x e^{-\sqrt{x}}, y(0) = 2.$

426. $x^2 y' - xy = y^2 \ln x, y(e) = 1.$

427. $xy' + 2x^2 y = \frac{2x}{y} e^{-2x^2}, y(0) = 1.$

428. $y' + y = x, y(0) = -2.$

429. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2y^2}{x}, y(1) = 1/2.$

430. $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}, y(\pi/2) = -2.$

431-440. Найти общее решение дифференциального уравнения.

431. $(y')^2 - yy'' = y^2 y'.$ **432.** $yy'' - y'(1 + y') = 0.$

433. $yy'' - (y')^2 + yy' = 0.$ **434.** $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0.$

435. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$ **436.** $((y')^2 - 6x)y'' + 2y' = 0.$

$$437. \quad yy'' = (y')^2 + y' \sqrt{y^2 + (y')^2} = 0. \quad 438. \quad y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x} \right).$$

$$439. \quad xy'' + xy' = 2.$$

$$440. \quad y'' - y' \operatorname{tg} x = \sin x.$$

441-450. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) методом вариации постоянных; б) определяя частное решение по виду правой части.

$$441. \quad \text{а) } y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2};$$

$$\text{б) } y'' + y = \sin x.$$

$$442. \quad \text{а) } y'' + 4y = \frac{2}{\cos 2x};$$

$$\text{б) } y'' - y' - 6yy = (x-1)e^{-2x}.$$

$$443. \quad \text{а) } y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3};$$

$$\text{б) } y'' + 2y' - 8y = 5xe^{2x}.$$

$$444. \quad \text{а) } y'' + 4y = \cos^2 x;$$

$$\text{б) } y'' - y' = x^2 - x.$$

$$445. \quad \text{а) } y'' + y' = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}};$$

$$\text{б) } y'' - 2y' - 3y = xe^{3x}.$$

$$446. \quad \text{а) } y'' + 9y = \operatorname{tg} 3x;$$

$$\text{б) } y'' + 2y' + y = 3e^{-x}.$$

$$447. \quad \text{а) } y'' + 2y' + y = e^{-x};$$

$$\text{б) } y'' + 9y = x \cos 3x.$$

$$448. \quad \text{а) } y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x;$$

$$\text{б) } y'' - 2y' + y = 9e^x.$$

$$449. \quad \text{а) } y'' + 2y' + y = \sqrt[3]{x^2} e^{-x};$$

$$\text{б) } y'' - 3y' + 2y = (x+3)e^x.$$

$$450. \quad \text{а) } y'' + y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{б) } y'' + 6y' + 9y = x^2 + 1.$$

451-460. Решить систему линейных дифференциальных уравнений двумя способами: методом исключения и с помощью характеристического уравнения.

$$451. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$452. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$$

$$453. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$$

$$454. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$$

$$455. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 7y, \\ \frac{dy}{dt} = -7x + y. \end{cases}$$

$$456. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 3y. \end{cases}$$

$$457. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$458. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y. \end{cases}$$

$$459. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 13x + 4y. \end{cases}$$

$$460. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y. \end{cases}$$

461-470. Составить дифференциальное уравнение и задачу Коши, соответствующие условиям задачи. Указать тип уравнения и метод его решения.

461. При движении тела массой m в неоднородной среде сила сопротивления $F = \frac{2v^2}{s+3}$, где v – скорость тела; s – пройденный путь. Определить пройденный путь как функцию времени, если начальная скорость v_0 .

462. Материальная точка массой m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos \omega t$, где F_0, ω – константы. Найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени она имела скорость v_0 .

463. С некоторой высоты вертикально вниз брошено тело массой m . Найти закон изменения скорости $v = v(t)$ падения этого тела, если на него действует сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

464. Тело, находящееся в начальный момент времени в жидкости, погружается в нее под действием собственного веса без начальной скорости. Сопротивление жидкости прямо пропорционально скорости тела. Найти закон движения тела, если его масса m .

465. Точка массой m движется прямолинейно. На нее действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности – k_1). Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности – k_2). Найти зависимость скорости от времени, считая, что в начальный момент скорость равна нулю.

466. Частица брошена вертикально вверх со скоростью v_0 . На нее действует сила тяжести и сила сопротивления $F = 2kmv$, где k – коэф-

коэффициент пропорциональности, m – масса частицы и v – скорость. Найти расстояние частицы от точки бросания в любой момент времени t .

467. Изолированному проводнику сообщен заряд q_0 . Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в каждый момент времени пропорциональна наличному заряду проводника. Определить заряд проводника в любой момент времени t .

468. Тело массой m , брошенное вертикально вверх со скоростью v_0 , испытывает сопротивление воздуха силой $F = kv$, где k – коэффициент пропорциональности, v – скорость. Найти закон движения тела.

469. Материальная точка массой m в момент времени $t=0$ начинает прямолинейное движение без начальной скорости под действием силы, которая прямо пропорциональна времени и обратно пропорциональна скорости движения точки. Найти закон движения точки.

470. Тело массой m движется с начальной скоростью v_0 под действием силы $F = 10(1 - t)$, которая совпадает по направлению со скоростью. Найти закон движения тела.

Ряды

471-480. Исследовать сходимость числового ряда.

471. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sin^2 n\alpha};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$

472. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$

473. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$

474. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)(6n+5)};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$

475. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$

476. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}.$

477. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$

$$\begin{array}{ll}
478. & \text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2n^2\sqrt{n}}. \\
479. & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}. \\
480. & \text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.
\end{array}$$

481-490. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд.

$$\begin{array}{ll}
481. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}. \quad 482. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}. \\
483. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}. \quad 484. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}{n}. \\
485. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}. \quad 486. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}. \\
487. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}. \quad 488. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{n}}{n}. \\
489. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}. \quad 490. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}.
\end{array}$$

491-500. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

$$\begin{array}{ll}
491. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}. \quad 492. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \\
493. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}. \quad 494. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}. \\
495. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)}. \quad 496. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n10^{n+1}}. \\
497. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(xn)^n}{n!}. \quad 498. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}. \\
499. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}. \quad 500. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n-1}(n-1).
\end{array}$$

501-510. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

$$501. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx.$$

$$502. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

$$503. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} \, dx.$$

$$504. \int_0^{0,25} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

$$505. \int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} \, dx.$$

$$506. \int_0^1 \sin x^3 \, dx.$$

$$507. \int_0^{0,8} x^{10} \sin x \, dx.$$

$$508. \int_0^1 \cos x^2 \, dx.$$

$$509. \int_0^{0,3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}.$$

$$510. \int_0^{0,125} \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

511-520. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале.

$$511. f(x) = 2 - x; \quad (-1; 1). \quad 512. f(x) = 2x; \quad (-2; 2).$$

$$513. f(x) = 2 - x; \quad (-1; 1). \quad 514. f(x) = x + 1; \quad (-\pi; \pi).$$

$$515. f(x) = x - 1; \quad (-1; 1). \quad 516. f(x) = 1 - x; \quad (-\pi; \pi).$$

$$517. f(x) = x + 3; \quad (-1; 1). \quad 518. f(x) = x; \quad (-3; 3).$$

$$519. f(x) = x + 1; \quad (-2; 2). \quad 520. f(x) = 2 + x; \quad (-1; 1).$$

521. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 3$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, правый конец стержня теплоизолирован, левый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 2, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases}$$

522. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 5$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, правый конец стержня теплоизолирован, левый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 3, & \frac{5}{2} < x \leq 5, \end{cases}$$

523. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 4$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, правый конец стержня теплоизолирован, левый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2, & 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

524. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 1$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, правый конец стержня теплоизолирован, левый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

525. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 4$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, правый конец стержня теплоизолирован, левый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ -2, & 2 < x \leq 4, \end{cases}$$

526. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 3$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$,

левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases}$$

527. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 6$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ 3, & 3 < x \leq 6, \end{cases}$$

528. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 7$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 3, & \frac{7}{2} < x \leq 7, \end{cases}$$

529. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 8$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 4, \\ 4, & 4 < x \leq 8, \end{cases}$$

530. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 3$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в стержне, если задана его начальная температура $u(x, 0) = u_0(x)$, левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре $u(0, t) = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ -1, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases}$$

Теория вероятностей

531-540. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Вычислить вероятность того, что среди них r выигрышных.

531. $n = 16, k = 13, m = 8, r = 6.$

532. $n = 17, k = 14, m = 9, r = 7.$

533. $n = 18, k = 15, m = 10, r = 8.$

534. $n = 19, k = 16, m = 11, r = 9.$

535. $n = 20, k = 15, m = 12, r = 8.$

536. $n = 17, k = 13, m = 11, r = 8.$

537. $n = 21, k = 14, m = 13, r = 10.$

538. $n = 23, k = 20, m = 15, r = 12.$

539. $n = 22, k = 19, m = 14, r = 12.$

540. $n = 25, k = 22, m = 17, r = 15.$

541. В игральном кубике центр тяжести смещен в сторону грани с шестью очками, из-за чего вероятность выпадения этой грани стала равна $\frac{1}{12}$, а вероятность выпадения грани с одним очком $\frac{1}{4}$. Найти вероятность того, что при двух бросаниях хотя бы один раз выпадет четное число очков.

542. Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,8, второго — 0,5, третьего — 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы два стрелка попадут в цель.

543. Два стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, второго — 0,75. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

544. Три участника игры поочередно набрасывают кольца на колышек. Вероятность набросить кольцо для первого игрока равна 0,7, для второго — 0,5, для третьего — 0,3. Найти вероятность того, что только четвертое кольцо окажется брошенным на колышек.

545. Из 12 билетов, пронумерованных от 1 до 12, один за другом (без возвращения) выбираются 2 билета. Найти вероятность того, что четность чисел на этих билетах одинакова.

546. Открывается одна за другой карта колоды 36 карт. Найти вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта.

547. На вход радио приемника поступают кодовые комбинации из 8 знаков, состоящих из 0 и 1. Найти вероятность того, что во взятой комбинации будет хотя бы один ноль.

548. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена.

549. По четырем каналам передается одинаковое сообщение. Вероятность того, что из-за помехи прием будет неправильным соответственно равны 0,2, 0,3, 0,25, 0,35. Найти вероятность того, что хотя бы по одному каналу сообщение будет передано правильно.

550. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

551-560. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i -й завод поставляет m_i процентов изделий ($i=1, 2, 3$). Среди изделий i -го завода n_i процентов первосортных. Купленное изделие оказалось первосортным, определить вероятность того, что оно было произведено на j -м заводе.

$$\mathbf{551.} \quad m_1 = 50, \quad m_2 = 30, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 70, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 90, \quad j = 1.$$

$$\mathbf{552.} \quad m_1 = 70, \quad m_2 = 10, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 75, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 90, \quad j = 2.$$

$$\mathbf{553.} \quad m_1 = 50, \quad m_2 = 20, \quad m_3 = 30, \quad n_1 = 70, \quad n_2 = 60, \quad n_3 = 90, \quad j = 3.$$

$$\mathbf{554.} \quad m_1 = 60, \quad m_2 = 20, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 70, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 90, \quad j = 1.$$

$$\mathbf{555.} \quad m_1 = 50, \quad m_2 = 30, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 70, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 90, \quad j = 2.$$

$$\mathbf{556.} \quad m_1 = 60, \quad m_2 = 20, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 75, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 90, \quad j = 3.$$

$$\mathbf{557.} \quad m_1 = 50, \quad m_2 = 30, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 80, \quad n_2 = 85, \quad n_3 = 90, \quad j = 1.$$

$$\mathbf{558.} \quad m_1 = 70, \quad m_2 = 10, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 60, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 70, \quad j = 2.$$

$$\mathbf{559.} \quad m_1 = 60, \quad m_2 = 20, \quad m_3 = 20, \quad n_1 = 75, \quad n_2 = 80, \quad n_3 = 90, \quad j = 3.$$

$$\mathbf{560.} \quad m_1 = 50, \quad m_2 = 20, \quad m_3 = 30, \quad n_1 = 80, \quad n_2 = 85, \quad n_3 = 90, \quad j = 1.$$

561-570. В каждом из независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью p . Найти вероятность того, что событие A произойдет а) ровно M раз; б) от K до M раз; в) больше чем M раз; г) меньше K раз.

$$\mathbf{561.} \quad n = 710, \quad p = 0,36, \quad M = 280, \quad K = 239.$$

$$\mathbf{562.} \quad n = 720, \quad p = 0,37, \quad M = 290, \quad K = 248.$$

$$\mathbf{563.} \quad n = 730, \quad p = 0,38, \quad M = 300, \quad K = 257.$$

$$\mathbf{564.} \quad n = 740, \quad p = 0,39, \quad M = 310, \quad K = 266.$$

$$\mathbf{565.} \quad n = 750, \quad p = 0,4, \quad M = 320, \quad K = 275.$$

$$\mathbf{566.} \quad n = 760, \quad p = 0,41, \quad M = 330, \quad K = 284.$$

$$\mathbf{567.} \quad n = 770, \quad p = 0,42, \quad M = 340, \quad K = 293.$$

$$\mathbf{568.} \quad n = 780, \quad p = 0,43, \quad M = 350, \quad K = 302.$$

$$\mathbf{569.} \quad n = 790, \quad p = 0,44, \quad M = 360, \quad K = 311.$$

$$\mathbf{570.} \quad n = 800, \quad p = 0,45, \quad M = 370, \quad K = 320.$$

571-580. Вероятность производства нестандартной детали равна p . Контролер берет наудачу деталь из партии и проверяет ее качество. Если деталь оказывается нестандартной, то дальнейшие испытания прекращаются и партия задерживается. Если деталь окажется стандартной, то контролер берет следующую деталь на проверку и так далее, но всегда он проверяет не более n деталей. Случайная величина X – число проверенных деталей. Составить закон распределения случайной величины X , найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

$$571. \quad n=5, \quad p=0,1.$$

$$572. \quad n=4, \quad p=0,1.$$

$$573. \quad n=5, \quad p=0,05.$$

$$574. \quad n=4, \quad p=0,05.$$

$$575. \quad n=5, \quad p=0,15.$$

$$576. \quad n=4, \quad p=0,15.$$

$$577. \quad n=4, \quad p=0,2.$$

$$578. \quad n=5, \quad p=0,2.$$

$$579. \quad n=6, \quad p=0,25.$$

$$580. \quad n=6, \quad p=0,3.$$

581-585. Найти функцию распределения. Определить матожидание и дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины. Построить графики функций распределения и плотности. Найти вероятность того, что $X \in (-1; 1.5)$.

$$581. \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (1, 3), \\ 0, & x \notin (1, 3). \end{cases}$$

$$582. \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (0, 3), \\ 0, & x \notin (0, 3). \end{cases}$$

$$583. \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (2, 3), \\ 0, & x \notin (2, 3). \end{cases}$$

$$584. \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (1, 2), \\ 0, & x \notin (1, 2). \end{cases}$$

$$585. \quad f(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in (2, 3), \\ 0, & x \notin (2, 3). \end{cases}$$

586-590. Найти функцию плотности. Определить матожидание и дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины. Построить графики функций распределения и плотности. Найти вероятность того, что $X \in (-1; 1.5)$.

$$586. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ a(x+2), & x \in (-2, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$587. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^3, & x \in (0, 3) \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$588. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & x \in (0, 3), \\ 1, & x \geq 3. \end{cases} \quad 589. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ a(x-2), & x \in (2, 4), \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$590. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^3, & x \in (0, 2), \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

590-600. Дано статистическое распределение выборки. Найдите выборочное среднее, дисперсию, выборочное среднее квадратичное отклонение, выборочную дисперсию. Постройте доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания с заданной надежностью $\gamma = 0,95$.

591.

x_i	102	112	122	132	142	152	162
n_i	4	6	10	400	20	12	8

592.

x_i	10,6	15,6	20,6	25,6	30,6	35,6	40,6
n_i	8	10	60	12	5	3	2

593.

x_i	26	32	38	44	50	56	62
n_i	5	15	40	25	8	4	3

594.

x_i	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	64,4
n_i	4	6	10	40	20	12	8

595.

x_i	110	115	120	125	130	135	140
n_i	5	10	30	25	15	10	5

596.

x_i	45	50	55	60	65	70	75
n_i	4	6	10	40	20	12	8

597.

x_i	10,2	10,9	11,6	12,3	13	13,7	14,4
n_i	8	10	60	12	5	3	2

598.

x_i	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5
n_i	5	15	40	25	8	4	3

599.

x_i	104	109	114	119	124	129	134
n_i	4	6	10	40	20	12	8

600.

x_i	105	110	115	120	125	130	135
n_i	4	6	10	30	30	15	5

Примерные вопросы для итогового контроля

Линейная алгебра

1. Матрицы, действия над ними.
2. Определители n -го порядка. Определение, свойства, вычисление определителей.
3. Обратная матрица. Определение, теорема существования и единственности обратной матрицы.
4. Теорема Крамера, формулы Крамера.
5. Определение и примеры линейных пространств.
6. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, их свойства. Базис, размерность, координаты в n -мерном пространстве.
7. Теорема существования и свойства ортонормированного базиса.
8. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
9. Теорема Кронекера - Капелли. Общая схема решения системы линейных алгебраических уравнений.
10. Свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения однородной системы уравнений.
11. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной системами уравнений. Структура общего решения неоднородной системы уравнений.
12. Линейный оператор и линейное преобразование. Матрица линейного преобразования. Действия над линейными преобразованиями.
13. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
14. Система комплексных чисел.
15. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
16. Действия над комплексными числами в тригонометрической (показательной) форме.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

17. Линейные операции над векторами в R^3 . Базис и координаты вектора в трехмерном пространстве. Теорема о разложении по базису.
18. Скалярное произведение векторов в R^3 (определение, свойства, выражение через координаты сомножителей, приложения).
19. Векторное произведение векторов в R^3 (определение, свойства, выражение через координаты сомножителей, приложения).

20. Смешанное произведение векторов в R^3 (определение, свойства, выражение через координаты сомножителей, приложения).

21. Плоскость как алгебраическая поверхность 1-го порядка. Векторное и общее уравнения плоскости.

22. Прямая на плоскости как алгебраическая линия 1-го порядка. Векторное и общее уравнения.

23. Прямая в пространстве. Векторное уравнение, общие, канонические уравнения прямой.

24. Взаимное расположение плоскостей, прямых, прямой и плоскости.

25. Эллипс (каноническое уравнение, форма кривой, геометрическое определение).

26. Гипербола (каноническое уравнение, форма кривой, геометрическое определение).

27. Парабола (каноническое уравнение, форма кривой, геометрическое определение).

28. Цилиндрические и конические поверхности.

29. Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка. Метод параллельных сечений.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

30. Понятие функции, область определения, способы задания, график, сложная функция.

31. Определение предела функции. Бесконечно большие функции.

32. Бесконечно малые функции, их свойства.

33. Теорема о пределе суммы, произведения и частного двух функций.

34. Сравнение бесконечно малых (больших) функций.

35. Эквивалентные бесконечно малые функции (определение, свойства, приложения).

36. Первый замечательный предел.

37. Предел числовой последовательности. Монотонные и ограниченные последовательности. Число e .

38. Второй замечательный предел.

39. Непрерывные функции, их свойства. Непрерывность элементарных функций.

40. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Точки разрыва, их классификация.

41. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.

42. Понятие дифференцируемости и дифференциала функции, связь с производной.
43. Геометрический, механический смысл дифференциала, использование его в приближенных вычислениях.
44. Связь между непрерывной и дифференцируемой функцией.
45. Производные степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических, гиперболических, обратных тригонометрических функций.
46. Производная суммы, произведения и частного двух функций.
47. Дифференциал суммы, произведения и частного двух функций.
48. Производная и дифференциал сложной функции, свойство инвариантности дифференциала 1-го порядка.
49. Неявно заданные функций, их дифференцирование.
50. Обратная функция, ее дифференцирование.
51. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.
52. Производные и дифференциалы высших порядков.
53. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
54. Теорема Лагранжа.
55. Правило Лопиталю, его применение для раскрытия неопределенностей.
56. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа.
57. Формулы Маклорена для функций e^x , $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.
58. Исследование функции с помощью производной (монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, асимптоты).

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

59. Понятие функции многих переменных, область определения, график.
60. Предел и непрерывность функции многих переменных.
61. Понятие частной производной, ее геометрический смысл для функции 2-х переменных.
62. Понятие дифференцируемости функции двух переменных. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости.
63. Понятие полного дифференциала функции многих переменных, его связь с понятиями дифференцируемости и частных производных.

64. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$; геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Использование полного дифференциала в приближенных вычислениях.

65. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.

66. Производные неявно заданной функции 1-ой переменной и 2-х переменных.

67. Формула Тейлора для функции многих переменных.

68. Экстремумы функции многих переменных, необходимое условие существования экстремума. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.

69. Задача о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой ограниченной области.

70. Производная по направлению, связь с частными производными.

71. Градиент функции $u = u(x, y, z)$, свойства градиента, связь с производной по направлению.

Интегральное исчисление функций одной переменной

72. Первообразная функция, ее свойства. Определение неопределенного интеграла, его простейшие свойства.

73. Интегралы некоторых элементарных функций (таблица интегралов).

74. Метод подстановки или замена переменной в неопределенном интеграле.

75. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

76. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

77. Алгоритм интегрирования рациональных дробей.

78. Интегралы от простейших (элементарных дробей).

79. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка и другие подстановки.

80. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

81. Тригонометрические подстановки.

82. Определение определенного интеграла, его простейшие свойства.

83. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.

84. Свойства определенного интеграла. Теоремы об оценке и о среднем значении.

85. Замена переменной в определенном интеграле.

86. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
87. Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.
88. Вычисление площади фигуры с помощью определенного интеграла (различные случаи).
89. Вычисление длины дуги с помощью определенного интеграла (различные случаи).
90. Физические приложения определенного интеграла.
91. Несобственные интегралы на неограниченном промежутке.
92. Несобственные интегралы от неограниченной функции.
93. Теоремы сравнения для несобственных интегралов. Понятие абсолютной сходимости.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

94. Определение и свойства двойного интеграла.
95. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат путем сведения к повторному.
96. Двойной интеграл в полярной системе координат.
97. Приложения двойного интеграла.
98. Определение и свойства тройного интеграла.
99. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат путем сведения к повторному.
100. Тройной интеграл в цилиндрической системе координат.
101. Тройной интеграл в сферической системе координат.
102. Приложения тройного интеграла.

Теория поля

103. Криволинейный интеграл 1-го рода. Определение и свойства.
104. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.
105. Приложения криволинейного интеграла 1-го рода.
106. Криволинейный интеграл 2-го рода. Определение и свойства.
107. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
108. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода.
109. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
110. Формула Грина. Интегрирование полного дифференциала.
111. Поверхностный интеграл 1-го рода. Определение и свойства.
112. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.
113. Приложения поверхностного интеграла 1-го рода.

114. Поверхностный интеграл 2-го рода. Определение и свойства.
 115. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.
 116. Приложения поверхностного интеграла 2-го рода.
 117. Формула Остроградского - Гаусса.
 118. Формула Стокса.
 119. Понятие скалярного поля, его характеристики.
 120. Понятие векторного поля. Векторные линии и векторные трубки.
 121. Дивергенция векторного поля, ее свойства.
 122. Ротор векторного поля, его свойства.
 123. Соленоидальное векторное поле, его свойства.
 124. Потенциальное векторное поле, его свойства.
 125. Гармоническое векторное поле, его свойства.

Дифференциальные уравнения

126. Понятие дифференциального уравнения (ДУ), порядка, решения, интегральной кривой, начальных условий для ДУ.
 127. ДУ 1-го порядка. Понятие общего и частного решения, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.
 128. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = f(x, y)$, метод изоклин.
 129. Уравнения с разделяющимися переменными.
 130. Однородное уравнение 1-го порядка. Метод решения.
 131. Линейное уравнение 1-го порядка и уравнение Бернулли. Методы их решения.
 132. Уравнение в полных дифференциалах. Метод решения.
 133. ДУ высших порядков. Общее и частное решение, понятие о краевой задаче. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
 134. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка (три случая).
 135. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков (ЛДУ). Линейный дифференциальный оператор, его свойства, запись с его помощью ЛДУ.
 136. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ), свойства решений.
 137. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости системы функций.

138. Формула Остроградского-Лиувилля.
139. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ.
140. Фундаментальная система решений ЛОДУ, теорема существования. Структура общего решения ЛОДУ.
141. Нахождение общего решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами с помощью характеристического уравнения (различные случаи характеристических корней).
142. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ).
143. Метод вариации произвольных постоянных решения ЛНДУ.
144. Нахождение частного решения ЛНДУ по виду правой части специального вида.
145. Приближенное решение задачи Коши ДУ. Метод Эйлера. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.
146. Понятие о системе дифференциальных уравнений, решение методом исключения. Матричная запись системы ДУ, матричный метод решения (случай простых действительных характеристических корней).

Ряды

145. Понятие числового ряда, сходимости и суммы.
146. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак. Гармонический ряд.
147. Свойства сходящихся рядов.
148. Признаки сравнения рядов с положительными членами.
149. Признак Даламбера.
150. Радикальный признак Коши.
151. Интегральный признак Коши.
152. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
153. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
154. Функциональные ряды. Область сходимости, сумма ряда.
155. Равномерная сходимость. Мажорируемые ряды. Признак Вейерштрасса.
156. Свойства равномерно сходящихся рядов.
157. Степенные ряды. Теорема Абеля.
158. Радиус, интервал сходимости степенного ряда. Способы нахождения радиуса сходимости.
159. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда, следствия из нее.

160. Ряд Тейлора. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора.

161. Ряд Маклорена для некоторых элементарных функций.

162. Приложения степенных рядов.

163. Тригонометрический ряд Фурье. Вывод формул для коэффициентов Фурье. Теорема Дирихле.

164. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

165. Метод Фурье решения уравнения теплопроводности.

Теория вероятностей

166. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.

167. Определение (аксиомы) вероятности и вероятностного пространства.

168. Дискретное вероятностное пространство (конечная и счетная вероятностные схемы). Классическое определение вероятности.

169. Непрерывное вероятностное пространство. Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.

170. Следствия из аксиом вероятности, теоремы сложения.

171. Условные вероятности. Независимость событий. Теоремы умножения.

172. Формула полной вероятности.

173. Формула Байеса.

174. Общее определение последовательности испытаний.

175. Последовательность независимых испытаний. Полиномиальная схема.

176. Последовательность испытаний Бернулли. Формула Бернулли.

177. Предельные теоремы в схеме Бернулли (теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа), их использование.

178. Случайная величина. Функция распределения, ее свойства.

179. Дискретная случайная величина. Понятие закона распределения. Ряд и многоугольник распределения.

180. Примеры дискретных случайных величин (биномиальное, гипергеометрическое, пуассоновское и геометрическое распределения).

181. Непрерывная случайная величина. Функция плотности распределения случайной величины, ее свойства.

182. Примеры непрерывных случайных величин (равномерное, показательное, нормальное распределения).

183. Совместное распределение нескольких случайных величин. Совместная функция распределения.

184. Закон распределения дискретного случайного вектора.
185. Непрерывный случайный вектор. Совместная функция плотности распределения.
186. Независимые случайные величины. Функции от случайных величин.
187. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания.
188. Математическое ожидание непрерывной случайной величины. Свойства математического ожидания.
189. Дисперсия, ее свойства.
190. Условное распределение, условное математическое ожидание.
191. Начальные и центральные моменты высших порядков.
192. Числовые характеристики случайного вектора.
193. Ковариация, коэффициент корреляции.
194. Элементы математической статистики. Первичная обработка выборки. Гистограмма, вариационный ряд, полигон частот.
195. Оценки параметров распределения: выборочное среднее, выборочная дисперсия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александрова, И.О. Математика. Дифференциальные уравнения в частных производных : учеб. пособие / И. О. Александрова, С. Г. Захаржевская. – Сиб. федерал. ун-т. Красноярск : ИПК СФУ, 2011. – 85 с.
2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник / Д. В. Беклемишев. – СПб. : Лань, 2015. – 444 с.
3. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович [и др.]. – СПб. : Лань, 2016. – 496 с.
4. Высшая математика : учеб. пособие для дистанцион. обучения : в 5-ти ч. / В. К. Юровский и др. ; ред. И. А. Кузоватов. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2000
5. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. – Москва : Юрайт, 2013. – 479 с.
6. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – Москва : Юрайт, 2011. – 404 с.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студентов вузов : в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва : Оникс, 2008.
8. Дураков, Б. К. Краткий курс высшей алгебры и аналитической геометрии : учебник / Б. К. Дураков. – Красноярск, 2017. – 421 с.
9. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов в 4 ч. : учеб. пособие для вузов по направлениям и специальностям в области техники и технологии : допущено Министерством образования РФ / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009.
10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для вузов : в 2-х т. / Н. С. Пискунов. – Москва : Интеграл-пресс, 2008.
11. Позднякова, Т.А. Математика. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие / Сиб. федер. ун-т, Ин-т математики и фундамент. информатики ; сост.: С. Н. Светлакова, Т. А. Позднякова. – Красноярск : СФУ, 2015. – 122 с.
12. Позднякова, Т.А. Математика. Приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Элементы теории поля : учеб. пособие для студентов энергетич. и радиотехн. спец. вузов / Т. А. Позднякова. – Сиб. федерал. ун-т. – Красноярск : ИПК СФУ, 2010. – 86 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Линейная алгебра.....	10
Векторная алгебра и аналитическая геометрия.....	14
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	18
Дифференциальное исчисление функций многих переменных	25
Интегральное исчисление функций одной переменной	28
Интегральное исчисление функций нескольких переменных	33
Теория поля.....	36
Дифференциальные уравнения.....	39
Ряды.....	42
Теория вероятностей.....	47
Примерные вопросы для итогового контроля.....	51
Библиографический список.....	60