

Контрольная работа №2.

Задание 1. Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя):

1. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 5x$

2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$

3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$

4. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$

5. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$

6. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2x}}$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$

7. а) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$

б) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right)$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 14x}{2x + \sqrt[3]{x^2}}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2 \right)$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 2} \right)^{x^2 + 3}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5} - 1}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 8}{x^3 + 10} \right)^{x+2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + x^{11} + 7x^{13})^3}{(1 + x^4)^{10}}$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 5}{x^4 + 10} \right)^{x+2}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} \right)$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + x}{3 + x} \right)^x$

$$8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$$

$$10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 7x - 1)^6}{(2x^6 - 13x^2 + x)^3}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x^2 - 4} \right)^x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + \sqrt{x^3 + x^4}}}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right)^{x+1}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 (3-7x)^2}{(2x-1)^4}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+8x}{2+8x} \right)^{x^2+1}$$

Задание 2. Найти точки разрыва функции, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва или найти скачки в точках разрыва I-рода:

$$1. \quad f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 6}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$

$$4. \quad f(x) = 3^{x/(1-x^2)}$$

$$5. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$6. \quad f(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$7. \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$$

$$8. \quad f(x) = \frac{2}{1 - 2^x}$$

$$9. \quad f(x) = \arcsin \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$10. \quad f(x) = 2^{1/x}$$

Задание 3. Вычислить производные функций:

1. $f(x) = 5x \cos x$; $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{12}$; $f(x) = x^{7/\ln x}$.
2. $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$; $f(x) = 2^{\sin 2x}$; $f(x) = (\sin x)^{5e^x}$.
3. $f(x) = (x+1) \operatorname{tg} x$; $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$; $f(x) = x^{\arcsin x}$.
4. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$; $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x^2}$; $f(x) = (x^2 + 1)^{\cos x}$.
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$; $f(x) = 3^{\operatorname{arctg}(2x+\pi)}$; $f(x) = x^{e^{\cos x}}$.
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$; $f(x) = \sin(\arcsin x)$; $f(x) = (\ln x)^{3^x}$.
7. $f(x) = \log_x 2^x$; $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}(x^2 + x^{-2})}$; $f(x) = (\arcsin x)^{e^x}$.
8. $f(x) = \frac{4 + 3x^3}{x^3 \sqrt{(2 + x^3)^2}}$; $f(x) = 10^{\frac{x}{\log_3 x}}$; $f(x) = x^{e^x} x^9$.
9. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; $f(x) = \cos \frac{1}{\log_2 x}$; $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x / 4}$.
10. $f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x + 2$; $f(x) = \frac{2}{7} \ln \left(\sqrt{x^7} + \sqrt{1+x^7} \right)$; $f(x) = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$.

Задание 4. Найти производную 3-го порядка:

1. $f(x) = \sin 2x + \cos(x+1)$
2. $f(x) = \lg(5x+2)$
3. $f(x) = 2^{3x+5}$
4. $f(x) = \frac{4}{x}$

$$5. \quad f(x) = \frac{4x+7}{2x+3}$$

$$6. \quad f(x) = \log_3(x+5)$$

$$7. \quad f(x) = \sin(3x+1) + \cos 5x$$

$$8. \quad f(x) = 7^{5x}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$10. \quad f(x) = \sqrt{e^{3x+1}}$$

Задание 5. Найти дифференциал:

$$1. \quad d(\arccos e^x)$$

$$2. \quad d(e^{-x} + \ln x)$$

$$3. \quad d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}})$$

$$4. \quad d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2))$$

$$5. \quad d \ln(\sqrt{1+2\sin x} + \sqrt{2\sin x - 1})$$

$$6. \quad d\left(\operatorname{arctg} \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$7. \quad d(x^{x^2})$$

$$8. \quad d\left(\frac{e^{x^3}}{1+x^3}\right)$$

$$9. \quad d\left(\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$10. \quad d\left(\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x}\right)$$

Задание 6. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

$$1. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$$

$$2. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{3}{x}\right)$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$$

$$3. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$4. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$5. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$$

$$6. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$7. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^{\frac{1}{\ln 2(x-1)}}$$

$$10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить график.

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$$

$$3. \quad f(x) = \sqrt[3]{(2-x)(x^2 - 4x + 1)}$$

$$4. \quad f(x) = (4-x)e^{x-3}$$

$$5. \quad f(x) = \frac{4 - x^3}{x^2}$$

$$6. \quad f(x) = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$$

$$7. \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$$

$$8. \quad f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{e^{3-x}}{3-x}$$

$$10. \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$$

Задание 8. Вычислить неопределенные интегралы:

$$1. \quad \text{a) } \int \frac{\operatorname{tg}(3 \ln x - 5)}{x} dx$$

$$\text{б) } \int x^6 \sqrt{2x^7 - 3} dx$$

$$\text{в) } \int (2 + 7x) \sin 4x dx$$

$$\text{г) } \int (4 - 9x) \ln x dx$$

$$\text{д) } \int \frac{25(x-3)}{(x-4)^2(x+1)} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{\cos^4 2x}$$

$$2. \quad \text{a) } \int \frac{e^{3-5 \ln x}}{5x} dx$$

$$\text{б) } \int x^7 \sqrt{8 + 3x^8} dx$$

$$\text{в) } \int (5 - 3x) e^{-x/3} dx$$

$$\text{г) } \int (4x^3 + 7) \ln x dx$$

$$\text{д) } \int \frac{27(1-x)}{(x+2)^2(x-7)} dx$$

$$\text{е) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

- | | | | |
|-----|---|---|--|
| 3. | a) $\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{9 - \sin^2 4x}} dx$ | б) $\int x^9 \sqrt{4 - 5x^{10}} dx$ | в) $\int (7x - 3)e^{-x/2} dx$ |
| | г) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$ | д) $\int \frac{26x^2 dx}{(x^2 + 9)(x - 2)}$ | е) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$ |
| 4. | a) $\int \cos 7x e^{5+3\sin 7x} dx$ | б) $\int x^5 \sqrt{6x^7 + 4} dx$ | в) $\int (9x + 4) \cos \frac{x}{3} dx$ |
| | г) $\int (5x^4 + 3x^2) \ln x dx$ | д) $\int \frac{16(x + 4)}{(x + 7)^2 (x - 5)} dx$ | е) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ |
| 5. | a) $\int \frac{e^{5 \operatorname{tg} x - 2}}{\cos^2 x} dx$ | б) $\int x^3 \sqrt{5 - 7x^4} dx$ | в) $\int (2 - 8x) \cos 4x dx$ |
| | г) $\int \ln(3 - 7x) dx$ | д) $\int \frac{8(x^2 + 5)}{(x + 1)^2 (x - 3)} dx$ | е) $\int \cos^2 5x dx$ |
| 6. | a) $\int \frac{\cos(3 + 4 \ln x)}{4x} dx$ | б) $\int x^3 \sqrt{9 + 3x^4} dx$ | в) $\int (4 - 5x) e^{8x} dx$ |
| | г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ | д) $\int \frac{7dx}{(x - 2)^2 (x + 5)}$ | е) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ |
| 7. | a) $\int \frac{e^{3 \operatorname{tg} x + 5}}{\cos^2 x} dx$ | б) $\int x^5 \sqrt{2 + 7x^6} dx$ | в) $\int (4x + 5) e^{-3x} dx$ |
| | г) $\int (3x^2 - 2x) \ln x dx$ | д) $\int \frac{1 - x}{(x + 1)^2 x} dx$ | е) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ |
| 8. | a) $\int \frac{\operatorname{ctg}(2 + 5 \operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx$ | б) $\int x^4 \sqrt{5 + 8x^5} dx$ | в) $\int (2x - 1) \cos 3x dx$ |
| | г) $\int \ln(3x + 8) dx$ | д) $\int \frac{x^2 + 2}{(x + 1)^2 (x + 2)} dx$ | е) $\int \sin^2 4x dx$ |
| 9. | a) $\int \frac{\sin 5x}{9 + \cos^2 5x} dx$ | б) $\int x^8 \sqrt{3 + 5x^9} dx$ | в) $\int (7x + 6) e^{x/2} dx$ |
| | г) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ | д) $\int \frac{52 dx}{(x^2 + 1)(x + 5)}$ | е) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$ |
| 10. | a) $\int \frac{e^{3 - 8\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | б) $\int x^4 \sqrt{2x^5 - 7} dx$ | в) $\int (4 - 6x) e^{-x/3} dx$ |
| | г) $\int (2x + 5x^4) \ln x dx$ | д) $\int \frac{25x + 50}{(x + 3)^2 (x - 2)} dx$ | е) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$ |

Задание 9. Вычислить определенные интегралы:

- | | | |
|---|--|---|
| 1. а) $\int_1^{16} \frac{63\sqrt[4]{x^3} - 35x}{2\sqrt[4]{x}} dx$ | б) $\int_1^9 \frac{75x dx}{\sqrt{4+5x}}$ | в) $\int_{-\pi/2}^{\pi/4} x \cos 2x dx$ |
| 2. а) $\int_1^8 \frac{10-15x}{\sqrt[3]{x}} dx$ | б) $\int_1^6 \frac{\sqrt{3} dx}{x\sqrt{12+4x}}$ | в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 18x \cos 3x dx$ |
| 3. а) $\int_1^9 81 \frac{2\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x^3} dx$ | б) $\int_0^5 \frac{27x dx}{\sqrt{49+3x}}$ | в) $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2} x \sin \frac{x}{4} dx$ |
| 4. а) $\int_1^{16} 35 \frac{3\sqrt{x} - x}{\sqrt[4]{x}} dx$ | б) $\int_0^7 \frac{3x dx}{\sqrt{4x-3}}$ | в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 9x \sin 3x dx$ |
| 5. а) $\int_1^{64} \frac{10x-250}{\sqrt[3]{x}} dx$ | б) $\int_1^7 \frac{3\sqrt{3} dx}{x\sqrt{4x-3}}$ | в) $\int_0^{\pi/4} \frac{72}{\sqrt{2}} x \sin 3x dx$ |
| 6. а) $\int_1^9 \frac{5x^2-5}{\sqrt{x^3}} dx$ | б) $\int_1^{14} \frac{\sqrt{11} dx}{2x\sqrt{11+5x}}$ | в) $\int_0^{\pi/3} 150x \sin 5x dx$ |
| 7. а) $\int_1^8 \frac{48\sqrt[3]{x} - 80}{x^2} dx$ | б) $\int_0^4 \frac{75x dx}{\sqrt{36-5x}}$ | в) $\int_{-\pi/2}^{\pi} 50x \cos 5x dx$ |
| 8. а) $\int_1^{27} \frac{2\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt[3]{x}}{x} dx$ | б) $\int_0^4 \frac{24x dx}{\sqrt{81-8x}}$ | в) $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{6} dx$ |
| 9. а) $\int_1^4 \frac{18x^2-3x^3}{\sqrt{x^5}} dx$ | б) $\int_1^3 \frac{dx}{2x\sqrt{1+8x}}$ | в) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{2} x \cos \frac{x}{2} dx$ |
| 10. а) $\int_1^8 16 \frac{\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$ | б) $\int_0^3 \frac{6x dx}{\sqrt{1+8x}}$ | в) $\int_0^{3\pi/2} \sqrt{2} x \sin \frac{x}{2} dx$ |

Задание 10. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

- | | |
|---|--|
| 1. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}}$ | б) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$ |
| 2. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$ | б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$ |
| 3. а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ | б) $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$ |
| 4. а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ | б) $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$ |

$$5. \quad \text{a)} \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$$

$$6. \quad \text{a)} \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}$$

$$7. \quad \text{a)} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$8. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{(16 + x^2)^5}}$$

$$9. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$$

$$10. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$$

$$\text{б)} \int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

$$\text{б)} \int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}$$

$$\text{б)} \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$$

$$\text{б)} \int_{1/2}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$