

### Контрольная работа №3.

**Задание 1.** Найти полный дифференциал функции двух переменных.

1.  $f(x, y) = x^3 + y^5 - 2xy^2$
2.  $f(x, y) = x^3 + y^5 - 2x \cos y$
3.  $f(x, y) = x^2 + 5xy^5 - y^2$
4.  $f(x, y) = x^3 + 2y^2 - y^2 \sin x$
5.  $f(x, y) = \ln x + 3y^5 - 2xy$
6.  $f(x, y) = x^3 + \ln y - x \cos y$
7.  $f(x, y) = 3^x + y^5 - 4xy$
8.  $f(x, y) = x^3 + 5^y - 2x \ln y$
9.  $f(x, y) = x^3 + e^y - 3x \cos y$
10.  $f(x, y) = e^x + 2y^3 - y \ln x$

**Задание 2.** Найти частные производные 2-ого порядка от заданных функций:

1.  $f(x, y) = \ln(x^2 + x \sin y)$
2.  $f(x, y) = \sin(xy^2 + \ln y)$
3.  $f(x, y) = \operatorname{tg}(x^2 + 5^{y+x})$
4.  $f(x, y) = \cos(2x^4 y + e^{2x})$
5.  $f(x, y) = \sin(x^2 y^3 + e^{x-y})$
6.  $f(x, y) = e^{-y}(x^2 + \sin y)$
7.  $f(x, y) = \ln \frac{5 + xy}{(x^2 + \sin y)}$
8.  $f(x, y) = \sqrt{\frac{y + \sin^2 x}{x}}$
9.  $f(x, y) = \sqrt{\frac{e^y + \sin x}{xy}}$
10.  $f(x, y) = \arctg(x^3 + x \ln y)$

**Задание 3.** Вычислить двойной интеграл:

1.  $\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy$   
 $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$
2.  $\iint_D (27x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy$   
 $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3$
3.  $\iint_D (4xy + 3x^2 y^2) dx dy$   
 $D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3$
4.  $\iint_D (18x^2 y^2 + 32x^3 y^3) dx dy$   
 $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$
5.  $\iint_D (6xy + 24x^3 y^3) dx dy$   
 $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$
6.  $\iint_D (24xy + 18x^2 y^2) dx dy$   
 $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$

$$7. \iint_D (8xy + 9x^2y^2) dx dy$$

$$D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3$$

$$8. \iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy$$

$$D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$$

$$9. \iint_D (12xy + 9x^2y^2) dx dy$$

$$D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$$

$$10. \iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$$

$$D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$$

#### Задание 4. Решить ОДУ:

- |                              |                                 |                           |
|------------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| 1. $xydx + (x+1)dy = 0$      | $y^2 + x^2y' = xyy'$            | $xy^2y' = x^2 + y^3$      |
| 2. $y' - xy^2 = 2xy$         | $xy' = y - xe^{y/x}$            | $x^2y' + xy + 1 = 0$      |
| 3. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$ | $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$ | $y = x(y' - x \cos x)$    |
| 4. $y' = \cos(y - x)$        | $xy' - y = xtg \frac{y}{x}$     | $(x + y^2)dy = ydx$       |
| 5. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ | $2y' + x = 4\sqrt{y}$           | $y' + 2y = y^2e^x$        |
| 6. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$     | $2x^2y' = y^3 + xy$             | $2x(x^2 + y)dx = dy$      |
| 7. $(x + 2y)y' = 1$          | $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$    | $(2e^y - x)y' = 1$        |
| 8. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ | $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$      | $xy' - 2y = 2x^4$         |
| 9. $xy' + y = y^2$           | $(x^2 + y^2)y' = 2xy$           | $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ |
| 10. $y' - y = 2x - 3$        | $x^3(y' - x) = y^2$             | $(xy + e^x)dx - xdy = 0$  |

#### Задание 5. Решить уравнение:

- |                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $y'' + y = x \sin x$       | 2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$    |
| 3. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$  | 4. $y'' + y = 4 \sin x$         |
| 5. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$  | 6. $y'' - y = 2e^x - x^2$       |
| 7. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$    | 8. $y'' + y = 4xe^x$            |
| 9. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$ | 10. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$ |

**Задание 6. Решить задачу Коши:**

1. а)  $(y^4 e^y + 2x)y' = y, y(0) = 1$       б)  $y''y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$
2. а)  $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, y(0) = 0$       б)  $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
3. а)  $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, y(0) = 1$       б)  $y'' = 50y^3, y(3) = 1, y'(3) = 5$
4. а)  $2(xy' + y)y' = xy^2, y(1) = 2$       б)  $y''y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2$
5. а)  $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3$       б)  $y'' = 8\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 2$
6. а)  $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2$       б)  $y'' = 32y^3, y(4) = 1, y'(4) = 4$
7. а)  $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y(0) = 0$       б)  $y''y^3 + 9 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 3$
8. а)  $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = 1/2$       б)  $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$
9. а)  $2(x + y^4)y' = y, y(-2) = -1$       б)  $y''y^3 + 4 = 0, y(0) = -1, y'(0) = -2$
10. а)  $y' - y = 2xy^2, y(0) = 1/2$       б)  $y'' = 8\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi / 2, y'(1) = 2$

**Задание 7. Исследовать на сходимость:**

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$        $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$        $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$        $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$        $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}$        $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3$        $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^2 + \sin 2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^2 + 1)}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{5}{n}}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left( \frac{2n}{3n+5} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln(2n)}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}$

**Задание 8.** Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt{2n+3}}$
3.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

$$5. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$$

$$10. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$$

**Задание 9.** Исследовать на сходимость степенной ряд:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}} x^n$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n x^n$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n(n^2+1)} x^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{3^n}(n+2)} x^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{3n-1}} x^n$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} x^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^{n+1} \sqrt{n^2+1}} x^n$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1} \sqrt{n^2+1}} x^n$$

**Задание 10.** Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням  $x$ :

$$1. \frac{6}{8+2x-x^2}$$

$$2. \frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$$

$$3. \ln(1+x-6x^2)$$

$$4. \frac{7}{12-2x-x^2}$$

$$5. (3+e^{-x})^2$$

$$6. (x-1)\sin 5x$$

$$7. \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$$

$$8. \frac{5}{6+x-x^2}$$

$$9. \ln(1-x-12x^2)$$

$$10. \frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$$

**Задание 11.** Разложить функцию в ряд Фурье на заданном интервале:

1.  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} (-\pi, \pi)$

2.  $f(x) = x^2 (-\pi, \pi)$

3.  $f(x) = 1 - |x| (-2, 2)$

4.  $f(x) = x + 1 (-\pi, \pi)$

5.  $f(x) = 1 + |x| (-1, 1)$

6.  $f(x) = x^2 + 1 (-2, 2)$

7.  $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} (-\pi, \pi)$

8.  $f(x) = \pi - x (0, 2\pi)$

9.  $f(x) = \frac{x}{2} + 4 (-1, 1)$

10.  $f(x) = \frac{\pi - x}{2} (-\pi, \pi)$